

5. a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resol·eu l'equació matricial $A^2 X = A - 3I$, en què

I és la matriu identitat.

[1,25 punts]

Calculem A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinant de la matriu A^2 és $|A^2| = 1 \neq 0$, per tant, és una matriu invertible.

Multipliquem l'equació matricial per $(A^2)^{-1}$ per l'esquerra, així ens queda:

$$A^2 \cdot X = A - 3 \cdot I \rightarrow X = (A^2)^{-1}(A - 3 \cdot I)$$

Calculem la matriu inversa de A^2 :

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Finalment:

$$X = A(A - 3 \cdot I)$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I .

[1,25 punts]

Sumem I a les dues bandes de la igualtat que ens donen:

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \rightarrow M^3 - 3M^2 + 3M = I$$

Traiem M factor comú per l'esquerra:

$$M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I \quad (*)$$

Fem el determinant a banda i banda de la igualtat i tenim:

$$\det(M \cdot (M^2 - 3M + 3I)) = \det I = 1 \rightarrow \det M \cdot \det(M^2 - 3M + 3I) = 1$$

D'on podem afirmar que $\det M \neq 0$, ja que si s'anul·lés la igualtat anterior no se satisfaria. Així doncs, M és invertible i podem expressar la inversa de la forma següent:

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$$

De l'expressió (*) es pot deduir directament que la matriu M és invertible i que l'expressió de la inversa, sense haver de justificar que el determinant és diferent de 0.