

5. Considereu les matrius $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a és invertible la matriu obtinguda del resultat del producte $P \cdot A$.

[1,5 punts]

Calculem el producte $P \cdot A$:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix}.$$

Sabem que una matriu quadrada és invertible si el rang de la matriu és màxim, és a dir, en aquest cas si el rang és 2.

Apliquem el mètode de Gauss. Si sumem a la segona fila la primera multiplicada per $(3-a)$, obtenim:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3-a & -2a-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 8-5a \end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang de la matriu serà 2 i, per tant, la matriu $P \cdot A$ serà invertible sempre que $8-5a$ sigui diferent de zero. Com que $5a-8=0 \rightarrow a=8/5$.
Obtenim que sempre que $a \neq \frac{8}{5}$ la matriu obtinguda del producte de $P \cdot A$ serà invertible.

b) Si $a=2$, trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $P \cdot A + X = I$, en què I denota la matriu identitat d'ordre 2.

[1 punt]

Quan $a=2$ tenim que

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Hem de resoldre l'equació $P \cdot A + X = I$. Obtenim:

$$X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$