

5. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu per a quin valor de a les dues matrius commuten, és a dir, per a quin valor de a es compleix que $A \cdot B = B \cdot A$. Comproveu que per a aquest valor de a se satisfà que $A \cdot B = 2 \cdot I$, en què I és la matriu identitat d'ordre dos.

[1,25 punts]

Comencem calculant els productes de les dues matrius:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

Observem que, perquè les dues matrius siguin iguals, cal que $1 - a = 0$, és a dir, que $a = 1$.

Quan $a = 1$, observem que:

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

b) Per al valor de a trobat a l'apartat anterior, calculeu les matrius inverses de les matrius A i B . Podeu aplicar la relació $A \cdot B = 2 \cdot I$.

[1,25 punts]

Sabem que es compleix la igualtat $A \cdot B = 2 \cdot I$. Si multipliquem per $\frac{1}{2}$ als dos costats de la igualtat, tenim que:

$$\frac{1}{2} \cdot A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot I = I$$

Així doncs, d'una banda, tenim que $\left(\frac{1}{2} \cdot A\right) \cdot B = I$, i per tant:

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'altra banda, tenim també que:

$$A \cdot \frac{1}{2} \cdot B = A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot B\right) = I$$

Així que:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$