Problema 5 sèrie 3 juliol 2022 Catalunya (àlgebra MAT).

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en què a és un paràmetre real.

a) Calculeu els valors del paràmetre a per als quals la matriu A és invertible.
[1,25 punts]

a) La matriu A serà invertible si i només si el seu determinant és diferent de zero.

Busquem el determinant aplicant la regla de Sarrus, per tal de saber per a quins valors del paràmetre a aquest determinant no s'anul·la:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}$$
$$= a(a+1)(-a-3) + a(a-1)(2a+1) - 0 - 0 + 2a(a+3)$$
$$= a(-a^2 - 4a - 3 + 2a^2 + a - 2a - 1 + 2a + 6) = a(a^2 - 3a + 2).$$

Quan resolem $|A| = 0$, obtenim $a = 0$ i $a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \\ a = 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{La matriu A serà invertible quan } a \neq 0, 1, 2.}$

b) Per al cas $a = 3$, resoleu l'equació $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} - 3\boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

b) Quan *a* =*3*, tenim $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Mirem si la matriu A és invertible. En cas afirmatiu, calculem la inversa.

Observació: per l'apartat anterior, com que $a = 3$, ja sabríem que la matriu té inversa.

$|A| = -72 + 42 + 36 = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la matriu A és invertible.

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Plantejament de la resolució de l'equació:

$$A \cdot X = B - 3I \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, obtenim X:

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot I \quad \rightarrow \boxed{X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}}.$$