

5. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real a :

$$\begin{cases} x + 2y + az = 8 \\ 2x + y - az = 1 \\ 3x - 3az = 1 \end{cases}$$

a) Comproveu que, per a qualsevol valor del paràmetre a , el sistema d'equacions lineals no té solució.

[1,25 punts]

Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre a .

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 8 \\ 2 & 1 & -a & 1 \\ 3 & 0 & -3a & 1 \end{array} \right)$$

Càlcul del rang de la matriu del sistema i el de la matriu ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0, \text{ per tant, } \text{Rang } M \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & -3a \end{vmatrix} = -3a - 6a - 3a + 12a = 0$$

El determinant de la matriu del sistema és nul (zero) per a qualsevol valor del paràmetre a . Per tant, $\text{Rang } M = 2$, per a qualsevol valor del paràmetre a .

Orlant el menor d'ordre 2 no nul, amb la finalitat de trobar el rang de la matriu ampliada, tenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0, \text{ per tant, } \text{Rang } \overline{M} = 3, \text{ per a qualsevol valor del paràmetre } a.$$

Com a conclusió tenim:

$\text{Rang } M \neq \text{Rang } \overline{M}$ per a qualsevol valor del paràmetre a .

En virtut del teorema de Rouché-Frobënus, es tracta, efectivament, d'un sistema incompatible, no té solució, per a qualsevol valor del paràmetre a .

b) Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

[1,25 punts]

Interpreteu geomètricament el sistema d'equacions lineals. Feu un dibuix esquemàtic que representi la posició relativa dels tres plans.

Cadascuna de les tres equacions es correspon amb un pla de l'espai tridimensional.

Sistema d'equacions incompatible, per tant, no hi ha cap punt de tall entre els tres plans.

No hi ha cap parell de plans paral·lels, atès que dels tres vectors normals (un vector normal a cada pla) no n'hi ha cap parell de proporcionals.

Els tres plans es tallen dos a dos en rectes paral·leles.

Dibuix esquemàtic:

