

5. Una fàbrica de vehicles produeix cotxes d'un model anomenat *Paradís* i els ven a 58.000 €. Sabem que els costos mensuals de producció són donats per la funció

$$C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704 \quad (\text{en milers d'euros}), \text{ en què } x \text{ denota el nombre de cotxes que es}$$

fabriquen mensualment.

- a) Suposant que es venen tots els cotxes que es fabriquen, verifiquem que la funció de

$$\text{beneficis és } B(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4.704 \quad (\text{en milers d'euros}).$$

[0,75 punts]

Els ingressos venen donats per la funció $I(x) = 58x$ (en milers d'euros). Per tant la funció que dona els beneficis mensuals en funció de les unitats produïdes serà:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 58x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4.704.$$

- b) Determineu el nombre de cotxes que cal fabricar mensualment per a no tenir pèrdues. Per a quin nombre d'unitats produïdes s'obté el benefici màxim i quin és aquest benefici màxim?

[1 punt]

Resolent l'equació $-\frac{1}{2}x^2 + 122x - 4.704 = 0$ determinem que la funció $B(x)$ és positiva, i per tant l'empresa no tindrà pèrdues, quan el nombre d'unitats produïdes estigui dins l'interval $[48, 196]$.

Ara hem de trobar el màxim de $B(x)$, que és un polinomi i per tant una funció contínua i derivable a tot el seu domini $[0, \infty)$. Derivant obtenim $B'(x) = -x + 122$, i igualant la derivada a zero s'obté com a solució $x = 122$. Podem comprovar fàcilment que és un màxim absolut ja que $B'(x) > 0$ quan $x \in [0, 122)$ i $B'(x) < 0$ quan $x > 122$. En el punt on s'assoleix el màxim el benefici obtingut és de $B(122) = 2.738$ milers d'euros.

- c) Es vol augmentar el preu de venda per unitat, de manera que el benefici màxim s'obtingui amb 130 unitats (la funció que dona el cost mensual en milers d'euros no varia). Quin ha de ser el nou preu de venda del cotxe?

[0,75 punts]

Denotem per a el nou preu de venda en milers d'euros. La nova funció de beneficis serà

$$F(x) = I(x) - C(x) = a x - \left(\frac{1}{2}x^2 - 64x + 4.704\right) = -\frac{1}{2}x^2 + (64 + a)x - 4.704.$$

Observem que és una paràbola i que el màxim s'assolirà en el seu vèrtex. Aplicant la fórmula del vèrtex de la paràbola obtenim l'equació

$$\frac{-(64 + a)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 130$$

És a dir, $64 + a = 130$ i per tant cal que $a = 66$. El nou preu de venda haurà de ser per tant de 66.000 euros.