

5. Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en què a i b són dos paràmetres reals.

a) Trobeu els valors dels paràmetres a i b per als quals es compleix que $A^2 - 2A = B$.

[1,25 punts]

Comencem calculant A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

Per tant,

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix}.$$

Finalment, aplicant que $A^2 - 2A = B$ tenim que

$$\begin{pmatrix} a^2 - 2a & 2ab - 2b \\ 0 & a^2 - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant, s'ha de satisfer que

$$\begin{cases} a^2 - 2a = 0 \\ 2ab - 2b = 1 \end{cases}$$

La primera equació ens dona $a(a - 2) = 0$ i, per tant, tenim dues possibles solucions, o bé $a = 0$ o bé $a = 2$.

Si $a = 0$, la segona equació ens queda

$$-2b = 1 \rightarrow b = \frac{-1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mentre que si $a = 2$, tenim

$$2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Si $a = 1$ i $b = 1$, resoleu l'equació matricial $2A = A \cdot X + B$.

[1,25 punts]

Ara tenim que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comencem aïllant X en l'equació

$$2A = AX + B \rightarrow AX = 2A - B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(2A - B) \\ \rightarrow X = 2I - A^{-1}B$$

en què I denota la matriu identitat d'ordre 2.

Calculem A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Per tant, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. I finalment,

$$X = 2I - A^{-1}B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$