

Problema 6. Es construeix una caixa de cartó sense tapa a partir d'un full rectangular de 16 per 10 cm. Això es fa retallant un quadrat de longitud x en cada cantó, es plega el full i s'alcen els quatre laterals de la caixa. Calculeu:

- a) Les dimensions de la caixa perquè tinga el major volum possible.

(8 punts)



1. Definir les Variables:

La làmina de cartó té dimensions 16 cm per 10 cm. Quan es tallen quadrats de costat x de cada cantonada i es plega per formar la caixa, les dimensions de la base de la caixa seran:

$$(16 - 2x) \text{ cm} \quad \text{i} \quad (10 - 2x) \text{ cm}$$

I l'altura de la caixa serà x cm.

2. Expressar el Volum de la Caixa:

El volum V de la caixa es pot expressar com:

$$V = \text{longitud} \times \text{amplada} \times \text{altura} = (16 - 2x)(10 - 2x)x$$

3. Funció del Volum:

Desenvolupem l'expressió del volum:

$$V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)x$$

$$V(x) = (160 - 32x - 20x + 4x^2)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

4. Derivada del Volum:

Per trobar el màxim volum, hem de trobar els punts crítics de $V(x)$ derivant i igualant a zero:

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

Igualem a zero per trobar els punts crítics:

$$12x^2 - 104x + 160 = 0$$

5. Resolució de l'Equació Quadràtica:

Resolem l'equació quadràtica utilitzant la fórmula quadràtica $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Amb $a = 12$, $b = -104$, i $c = 160$:

$$x = \frac{104 \pm \sqrt{104^2 - 4 \cdot 12 \cdot 160}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{104 \pm \sqrt{10816 - 7680}}{24}$$

$$x = \frac{104 \pm \sqrt{3136}}{24}$$

$$x = \frac{104 \pm 56}{24}$$

Això ens dona dos valors:

$$x = \frac{160}{24} = \frac{20}{3} \approx 6,67 \quad (\text{no és vàlid perquè } 6,67 > 5)$$

$$x = \frac{48}{24} = 2$$

6. Verificar el Valor:

Només $x = 2$ és vàlid. Comprovem que és un màxim local:

$$V''(x) = 24x - 104$$

Substituint $x = 2$:

$$V''(2) = 24 \cdot 2 - 104 = 48 - 104 = -56$$

Com que $V''(2) < 0$, $x = 2$ és un màxim local.

Dimensions de la Caixa:

Així doncs, les dimensions de la caixa perquè tingui el màxim volum són:

- Longitud: $16 - 2 \cdot 2 = 12$ cm
- Amplada: $10 - 2 \cdot 2 = 6$ cm
- Altura: 2 cm

Per tant, les dimensions de la caixa de màxim volum són 12 cm x 6 cm x 2 cm.

b) Aquest volum. (2 punts)

Per calcular el volum de la caixa amb les dimensions òptimes que hem trobat (12 cm de longitud, 6 cm d'amplada, i 2 cm d'alçada), utilitzem la fórmula del volum:

$$V = \text{longitud} \times \text{amplada} \times \text{alçada}$$

Substituint les dimensions:

$$V = 12 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$$

$$V = 144 \text{ cm}^3$$

Així, el volum màxim de la caixa és de 144 cm^3 .