

Problema 6. Una empresa de vacunes per a bestiar boví avalua actualment l'efectivitat de dos mètodes diferents, A i B, per a administrar una vacuna contra virus que afecten l'aparell respiratori. En l'estudi, dels 600 caps de bestiar d'una explotació ramadera, 250 es van vacunar pel mètode A; 250 més, pel mètode B; i la resta no es van vacunar. Es va observar que, al llarg dels quatre mesos següents, va patir problemes respiratoris el 30 % dels caps de bestiar vacunats pel mètode A, el 20 % dels vacunats pel mètode B, i el 60 % dels no vacunats. Calculeu:

- a) La probabilitat que un cap de bestiar triat a l'atzar haja tingut problemes respiratoris. (3 punts)

1. Determinar les proporcions de caps de bestiar en cada grup:

- Mètode A: $\frac{250}{600} = \frac{5}{12}$
- Mètode B: $\frac{250}{600} = \frac{5}{12}$
- No vacunats: $\frac{100}{600} = \frac{1}{6}$

2. Determinar les probabilitats que un cap de bestiar en cada grup tingui problemes respiratoris:

- Per al mètode A: $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$
- Per al mètode B: $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$
- Per als no vacunats: $60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

3. Calcular la probabilitat total utilitzant la fórmula de la probabilitat total:

$$P(\text{problemes respiratoris}) = P(\text{problemes}|A) \cdot P(A) + P(\text{problemes}|B) \cdot P(B) + \\ + P(\text{problemes}|\text{no vacunats}) \cdot P(\text{no vacunats})$$

Substituïm les fraccions en la fórmula:

$$P(\text{problemes respiratoris}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

Realitzem els càlculs pas a pas:

- Calcularem cada terme per separat:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 12} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 12} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

- Sumem les fraccions:

Per sumar aquestes fraccions, les convertirem a un denominador comú. El mínim comú múltiple de 8, 12 i 10 és 120.

Convertim les fraccions:

$$\frac{1}{8} = \frac{15}{120}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{10}{120}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{12}{120}$$

Sumem les fraccions amb denominador 120:

$$\frac{15}{120} + \frac{10}{120} + \frac{12}{120} = \frac{37}{120}$$

4. Convertir la fracció a decimal:

Dividim 37 entre 120:

$$\frac{37}{120} \approx 0,3083$$

Per tant, la probabilitat que un cap de bestiar triat a l'atzar hagi tingut problemes respiratoris és 0,3083 o 30,83%.

- b) La probabilitat que un cap de bestiar que no ha tingut problemes respiratoris haja sigut vacunat pel mètode B. *(4 punts)*

Per calcular la probabilitat que un cap de bestiar que no ha tingut problemes respiratoris hagi estat vacunat pel mètode B, podem utilitzar el teorema de Bayes.

Definim les següents esdeveniments:

- A : Un cap de bestiar ha estat vacunat pel mètode A.
- B : Un cap de bestiar ha estat vacunat pel mètode B.
- N : Un cap de bestiar no ha estat vacunat.
- P : Un cap de bestiar ha tingut problemes respiratoris.

Volem trobar la probabilitat $P(B|\text{no problemes})$, que és la probabilitat que un cap de bestiar vacunat pel mètode B no hagi tingut problemes respiratoris.

Utilitzarem les següents probabilitats:

- $P(\text{no problemes}|B)$: Probabilitat que un cap de bestiar vacunat pel mètode B no tingui problemes respiratoris.
- $P(B)$: Probabilitat que un cap de bestiar sigui vacunat pel mètode B.
- $P(\text{no problemes})$: Probabilitat que un cap de bestiar triat a l'atzar no tingui problemes respiratoris.

Pas 1: Calcular $P(\text{no problemes}|B)$

La probabilitat que un cap de bestiar vacunat pel mètode B no tingui problemes respiratoris és:

$$P(\text{no problemes}|B) = 1 - P(\text{problemes}|B) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Pas 2: Calcular $P(B)$

La probabilitat que un cap de bestiar sigui vacunat pel mètode B és:

$$P(B) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}$$

Pas 3: Calcular $P(\text{no problemes})$

Utilitzarem la fórmula de la probabilitat total per calcular la probabilitat que un cap de bestiar triat a l'atzar no tingui problemes respiratoris:

$$P(\text{no problemes}) = P(\text{no problemes}|A) \cdot P(A) + P(\text{no problemes}|B) \cdot P(B) + P(\text{no problemes}|N) \cdot P(N)$$

On:

- $P(\text{no problemes}|A) = 1 - P(\text{problemes}|A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$
- $P(\text{no problemes}|N) = 1 - P(\text{problemes}|N) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- $P(A) = \frac{5}{12}$
- $P(B) = \frac{5}{12}$
- $P(N) = \frac{1}{6}$

Substituïm aquests valors a la fórmula:

$$P(\text{no problemes}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{12} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

Calculem cada terme:

- $\frac{7}{10} \cdot \frac{5}{12} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$
- $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$
- $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Convertim aquestes fraccions al denominador comú de 120:

- $\frac{7}{24} = \frac{35}{120}$
- $\frac{1}{3} = \frac{40}{120}$
- $\frac{1}{15} = \frac{8}{120}$

Sumem:

$$P(\text{no problemes}) = \frac{35}{120} + \frac{40}{120} + \frac{8}{120} = \frac{83}{120}$$

Pas 4: Calcular $P(B|\text{no problemes})$

Utilitzarem la fórmula de Bayes:

$$P(B|\text{no problemes}) = \frac{P(\text{no problemes}|B) \cdot P(B)}{P(\text{no problemes})}$$

Substituïm els valors:

$$P(B|\text{no problemes}) = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{83}{120}}$$

Simplifiquem el numerador:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

Així que:

$$P(B|\text{no problemes}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{83}{120}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{120}{83} = \frac{40}{83}$$

Convertir a decimal:

$$\frac{40}{83} \approx 0,4819$$

Per tant, la probabilitat que un cap de bestiar que no ha tingut problemes respiratoris hagi estat vacunat pel mètode B és aproximadament **0,4819** o **48,19%**.

- c) La probabilitat de la intersecció dels successos “el cap de bestiar no ha sigut vacunat” i “el cap de bestiar té problemes respiratoris”. *(3 punts)*

Per calcular la probabilitat que un cap de bestiar que no ha estat vacunat tingui problemes respiratoris, utilitzarem la probabilitat conjunta de dos esdeveniments.

Definim els esdeveniments:

- N : Un cap de bestiar no ha estat vacunat.
- P : Un cap de bestiar té problemes respiratoris.

Volem trobar la probabilitat conjunta $P(N \cap P)$, és a dir, la probabilitat que un cap de bestiar no hagi estat vacunat i tingui problemes respiratoris.

Càlcul de $P(N \cap P)$

Utilitzarem la fórmula de la probabilitat conjunta:

$$P(N \cap P) = P(P|N) \cdot P(N)$$

On:

- $P(P|N)$ és la probabilitat que un cap de bestiar no vacunat tingui problemes respiratoris.
- $P(N)$ és la probabilitat que un cap de bestiar no hagi estat vacunat.

1. Calcular $P(P|N)$:

La probabilitat que un cap de bestiar no vacunat tingui problemes respiratoris és:

$$P(P|N) = 0,60 = \frac{3}{5}$$

2. Calcular $P(N)$:

La probabilitat que un cap de bestiar no hagi estat vacunat és:

$$P(N) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

3. Aplicar la fórmula:

$$P(N \cap P) = P(P|N) \cdot P(N) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

Convertir a decimal

Convertim la fracció a decimal:

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

Per tant, la probabilitat que un cap de bestiar no hagi estat vacunat i tingui problemes respiratoris és 0,1 o 10%.