

Problema 6. Siga el rectangle R definit pels punts del pla $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ i $(-1,1)$. Es consideren les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2$ i $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contingudes dins de R . Obtenir el valor de a que compleix que l'àrea compresa entre aquestes gràfiques és igual a un terç de l'àrea de R . (10 punts)

Pas 1: Determinar l'àrea del rectangle R

El rectangle R està definit pels punts $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ i $(-1, 1)$. Les dimensions del rectangle són:

- Amplada: $1 - (-1) = 2$
- Alçada: $1 - 0 = 1$

Per tant, l'àrea del rectangle R és:

$$\text{Àrea de } R = 2 \cdot 1 = 2$$

Pas 2: Trobar la intersecció de $f(x) = x^2$ i $g(x) = a$

Les funcions $f(x)$ i $g(x)$ es tallen quan:

$$x^2 = a$$

Això significa que:

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Pas 3: Dividir l'interval en parts

Com que $f(x) = x^2$ i $g(x) = a$, necessitem dividir l'interval de -1 a 1 en parts basant-nos en els punts d'intersecció $-\sqrt{a}$ i $\sqrt{a}$:

1. Des de -1 fins a $-\sqrt{a}$, $f(x) = x^2$ és major que $g(x) = a$.
2. Des de $-\sqrt{a}$ fins a $\sqrt{a}$, $g(x) = a$ és major que $f(x) = x^2$.
3. Des de $\sqrt{a}$ fins a 1 , $f(x) = x^2$ és major que $g(x) = a$.

Pas 4: Determinar l'àrea en cada interval

L'àrea entre les dues funcions es calcula com:

$$\text{Àrea} = \int_{-1}^{-\sqrt{a}} (x^2 - a) dx + \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx + \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx$$

Pas 5: Calculer les integrals

1.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{-\sqrt{a}} (x^2 - a) dx &= \int_{-1}^{-\sqrt{a}} x^2 dx - a \int_{-1}^{-\sqrt{a}} 1 dx \\&= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{-\sqrt{a}} - a [x]_{-1}^{-\sqrt{a}} \\&= \left(\frac{(-\sqrt{a})^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) - a (-\sqrt{a} - (-1)) \\&= \left(-\frac{a^{3/2}}{3} + \frac{1}{3} \right) - a(1 - \sqrt{a}) \\&= -\frac{a^{3/2}}{3} + \frac{1}{3} - a + a\sqrt{a}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx &= a \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} 1 dx - \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} x^2 dx \\&= a [x]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \\&= a (\sqrt{a} - (-\sqrt{a})) - \left(\frac{(\sqrt{a})^3}{3} - \left(-\frac{a^{3/2}}{3} \right) \right) \\&= a(2\sqrt{a}) - \left(\frac{a^{3/2}}{3} - \left(-\frac{a^{3/2}}{3} \right) \right)\end{aligned}$$

$$= 2a^{3/2} - \frac{2a^{3/2}}{3}$$

$$= \frac{6a^{3/2}}{3} - \frac{2a^{3/2}}{3}$$

$$= \frac{4a^{3/2}}{3}$$

3.

$$\int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a) dx = \int_{\sqrt{a}}^1 x^2 dx - a \int_{\sqrt{a}}^1 1 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt{a}}^1 - a [x]_{\sqrt{a}}^1$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(\sqrt{a})^3}{3} \right) - a(1 - \sqrt{a})$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{a^{3/2}}{3} \right) - a(1 - \sqrt{a})$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{a^{3/2}}{3} - a + a\sqrt{a}$$

Pas 6: Sumar les àrees

Sumem les àrees calculades:

$$\text{Àrea} = \left(-\frac{a^{3/2}}{3} + \frac{1}{3} - a + a\sqrt{a} \right) + \frac{4a^{3/2}}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{a^{3/2}}{3} - a + a\sqrt{a} \right)$$

Simplifiquem:

$$\text{Àrea} = -\frac{a^{3/2}}{3} + \frac{1}{3} - a + a\sqrt{a} + \frac{4a^{3/2}}{3} + \frac{1}{3} - \frac{a^{3/2}}{3} - a + a\sqrt{a}$$

$$\text{Àrea} = \left(\frac{4a^{3/2}}{3} - \frac{2a^{3/2}}{3} \right) + \left(\frac{2}{3} \right) + (-2a + 2a\sqrt{a})$$

$$\text{Àrea} = \frac{2a^{3/2}}{3} + \frac{2}{3} - 2a + 2a\sqrt{a}$$

Segons el problema, aquesta àrea és igual a un terç de l'àrea del rectangle R :

$$\frac{2a^{3/2}}{3} + \frac{2}{3} - 2a + 2a\sqrt{a} = \frac{2}{3}$$

Pas 7: Resoldre per a

Simplifiquem l'equació:

$$\frac{2a^{3/2}}{3} - 2a + 2a\sqrt{a} = 0$$

Agrupem termes semblants:

$$\frac{2a^{3/2}}{3} + 2a\sqrt{a} - 2a = 0$$

Multipliquem tots els termes per 3 per simplificar:

$$2a^{3/2} + 6a\sqrt{a} - 6a = 0$$

$$8a^{3/2} - 6a = 0$$

Factoritzem $2a$:

$$2a(4a^{1/2} - 3) = 0$$

Això implica que:

$$2a = 0 \quad \text{o} \quad 4a^{1/2} - 3 = 0$$

Com que $2a = 0$ no té sentit (ja que $0 < a < 1$), resollem per l'altre terme:

$$4a^{1/2} = 3$$

$$a^{1/2} = \frac{3}{4}$$

$$a = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$a = \frac{9}{16}$$

Per tant, el valor de a que compleix que l'àrea compresa entre aquestes gràfiques és igual a un terç de l'àrea del rectangle R és $a = \frac{9}{16}$.

