

Problema 6. Llancem un dau de 6 cares ben equilibrat. Si en llançar el dau obtenim un nombre major que 2, llavors llancem dues vegades una moneda ben construïda; però si en llançar el dau obtenim un nombre menor o igual que 2, llavors llancem dues vegades una moneda defectuosa en la qual la probabilitat d'obtenir cara és tres vegades major que la d'obtenir creu.

- a) Si sabem que en els dos llançaments de la moneda hem obtingut dues cares, quina és la probabilitat que hàgem obtingut un nombre major que 2 en llançar el dau? *(3 punts)*

Per resoldre el problema, hem de calcular la probabilitat condicional que hàgim obtingut un nombre major que 2 en llançar el dau, donat que en els dos llançaments de la moneda hem obtingut dues cares. Utilitzarem el teorema de Bayes per fer-ho.

Pas 1: Definir els esdeveniments

- **Dau:**
 - A : llançar el dau i obtenir un nombre major que 2.
 - B : llançar el dau i obtenir un nombre menor o igual que 2.
- **Moneda:**
 - Si el nombre del dau és major que 2 (A), llançarem dues vegades una moneda justa.
 - Si el nombre del dau és menor o igual que 2 (B), llançarem dues vegades una moneda defectuosa.
- **E**: obtenir dues cares en els dos llançaments de la moneda.

Pas 2: Calcular les probabilitats necessàries

1. Probabilitat de cada esdeveniment del dau:

- La probabilitat que el dau mostri un nombre major que 2 (és a dir, 3, 4, 5 o 6) és:

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

- La probabilitat que el dau mostri un nombre menor o igual que 2 (és a dir, 1 o 2) és:

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2. Probabilitat d'obtenir dues cares amb una moneda justa:

- La probabilitat de cara en una moneda justa és $\frac{1}{2}$. Per tant, la probabilitat d'obtenir dues cares és:

$$P(E | A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

3. Probabilitat d'obtenir dues cares amb una moneda defectuosa:

- La probabilitat de cara en la moneda defectuosa és $\frac{3}{4}$ (ja que és tres vegades més probable que obtenir creu, i $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$). Per tant, la probabilitat d'obtenir dues cares és:

$$P(E | B) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

4. Probabilitat total d'obtenir dues cares (usant la regla de la probabilitat total):

$$P(E) = P(E \mid A) \cdot P(A) + P(E \mid B) \cdot P(B)$$

$$P(E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{3}$$

$$P(E) = \frac{1}{6} + \frac{9}{48}$$

$$P(E) = \frac{8}{48} + \frac{9}{48} = \frac{17}{48}$$

Pas 3: Aplicar el teorema de Bayes

Per calcular la probabilitat que hàgim obtingut un nombre major que 2 donat que hem obtingut dues cares, utilitzem el teorema de Bayes:

$$P(A \mid E) = \frac{P(E \mid A) \cdot P(A)}{P(E)}$$

$$P(A \mid E) = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{17}{48}}$$

$$P(A \mid E) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}}$$

$$P(A \mid E) = \frac{8}{17}$$

Per tant, la probabilitat que hàgim obtingut un nombre major que 2 en llançar el dau, donat que hem obtingut dues cares, és $\frac{8}{17}$.

- b) Calculeu la probabilitat de la unió dels successos "obtenir un nombre menor o igual que 2 en llançar el dau" i "obtenir almenys una cara en els dos llançaments de la moneda". (4 punts)

Per calcular la probabilitat de la unió dels esdeveniments "obtenir un nombre menor o igual que 2 en llançar el dau" i "obtenir almenys una cara en els dos llançaments de la moneda", utilitzarem la fórmula de la probabilitat de la unió de dos esdeveniments.

Anomenem els esdeveniments:

- B : obtenir un nombre menor o igual que 2 en llançar el dau.
- F : obtenir almenys una cara en els dos llançaments de la moneda.

La fórmula per a la probabilitat de la unió de dos esdeveniments és:

$$P(B \cup F) = P(B) + P(F) - P(B \cap F)$$

On:

- $P(B)$ és la probabilitat d'obtenir un nombre menor o igual que 2 en llançar el dau.
- $P(F)$ és la probabilitat d'obtenir almenys una cara en els dos llançaments de la moneda.
- $P(B \cap F)$ és la probabilitat d'obtenir un nombre menor o igual que 2 en llançar el dau i almenys una cara en els dos llançaments de la moneda.

Càlcul de les probabilitats

1. Probabilitat de B :

$$P(B) = \frac{1}{3}$$

2. Probabilitat de F :

Primer calculem la probabilitat de no obtenir cap cara en els dos llançaments de la moneda. Aquesta probabilitat és complementària a la de "obtenir almenys una cara".

- Si el dau mostra un nombre major que 2, la moneda és justa. La probabilitat de no obtenir cap cara en dos llançaments és:

$$P(\text{no cara} \mid A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- Si el dau mostra un nombre menor o igual que 2, la moneda és defectuosa. La probabilitat de no obtenir cap cara en dos llançaments és:

$$P(\text{no cara} \mid B) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

La probabilitat d'obtenir almenys una cara és complementària a la probabilitat de no obtenir cap cara:

$$P(F \mid A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(F \mid B) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

La probabilitat total d'obtenir almenys una cara es calcula com:

$$P(F) = P(F \mid A) \cdot P(A) + P(F \mid B) \cdot P(B)$$

$$P(F) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{3}$$

$$P(F) = \frac{1}{2} + \frac{15}{48}$$

$$P(F) = \frac{24}{48} + \frac{15}{48} = \frac{39}{48} = \frac{13}{16}$$

3. Probabilitat de $B \cap F$:

Calculem $P(B \cap F)$ com la probabilitat que el dau mostri un nombre menor o igual que 2 i que obtinguem almenys una cara en els dos llançaments de la moneda.

La probabilitat d'obtenir almenys una cara si el dau mostra un nombre menor o igual que 2 (amb una moneda defectuosa) és $\frac{15}{16}$.

$$P(B \cap F) = P(F | B) \cdot P(B)$$

$$P(B \cap F) = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$$

Càlcul final de $P(B \cup F)$

Utilitzant la fórmula de la probabilitat de la unió:

$$P(B \cup F) = P(B) + P(F) - P(B \cap F)$$

$$P(B \cup F) = \frac{1}{3} + \frac{13}{16} - \frac{5}{16}$$

$$P(B \cup F) = \frac{1}{3} + \frac{8}{16}$$

$$P(B \cup F) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$P(B \cup F) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Per tant, la probabilitat de la unió dels esdeveniments "obtenir un nombre menor o igual que 2 en llançar el dau" i "obtenir almenys una cara en els dos llançaments de la moneda" és $\frac{5}{6}$.

- c) Són independents els successos "obtenir un 6 en llançar el dau" i "obtenir dues creus en els dos llançaments de la moneda"? (3 punts)

Per determinar si els successos "obtenir un 6 en llançar el dau" i "obtenir dues creus en els dos llançaments de la moneda" són independents, hem de verificar si la següent condició es compleix:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

On:

- A és l'esdeveniment "obtenir un 6 en llançar el dau".
- B és l'esdeveniment "obtenir dues creus en els dos llançaments de la moneda".

Càlcul de les probabilitats

1. Probabilitat de A :

$$P(A) = \text{Probabilitat de llançar un 6 en un dau de 6 cares} = \frac{1}{6}$$

2. Probabilitat de B :

Calculem $P(B)$, la probabilitat de llançar dues creus en els dos llançaments de la moneda.

- Si el dau mostra un nombre major que 2 (llançament de moneda justa), la probabilitat d'obtenir dues creus en una moneda justa és:

$$P(B | A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

- Si el dau mostra un nombre menor o igual que 2 (llançament de moneda defectuosa), la probabilitat d'obtenir dues creus en una moneda defectuosa és:

$$P(B | B) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

La probabilitat total de B es calcula com:

$$P(B) = P(B | A) \cdot P(A) + P(B | B) \cdot P(B)$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{48}$$

$$P(B) = \frac{8}{48} + \frac{1}{48} = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}$$

3. Probabilitat de $A \cap B$:

Per trobar $P(A \cap B)$, necessitem la probabilitat d'obtenir un 6 en el dau i, alhora, obtenir dues creus en els dos llançaments de la moneda.

- Si el dau mostra un 6 (esdeveniment A), la moneda és justa. La probabilitat d'obtenir dues creus és:

$$P(B \mid A) = \frac{1}{4}$$

- La probabilitat que el dau mostri un 6 és:

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

La probabilitat de $A \cap B$ és:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

4. Verificar la independència:

Compareu $P(A \cap B)$ amb $P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{96} = \frac{1}{32}$$

Compareu-ho amb $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

Com que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, els esdeveniments "obtenir un 6 en llançar el dau" i "obtenir dues creus en els dos llançaments de la moneda" no són independents.