

P6. — [10 punts] Calcula l'àrea de la superfície compresa entre les corbes $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ i els seus punts de tall.

Per calcular l'àrea de la superfície compresa entre les corbes $f(x) = 6x - x^2$ i $g(x) = x^2 - 2x$, seguim aquests passos:

1. Trobar els punts de tall

Per trobar els punts de tall entre $f(x)$ i $g(x)$, igualem les dues funcions:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x$$

Això es simplifica a:

$$6x - x^2 - x^2 + 2x = 0$$

$$8x - 2x^2 = 0$$

$$2x(4 - x) = 0$$

Això ens dona els punts:

$$x = 0$$

$$x = 4$$

2. Determinar quina funció està per sobre entre aquests punts

Avaluem les funcions en un punt intermedi entre $x = 0$ i $x = 4$, per exemple $x = 2$:

$$f(2) = 6(2) - (2)^2 = 12 - 4 = 8$$

$$g(2) = (2)^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$$

Per tant, $f(x)$ està per sobre de $g(x)$ en aquest interval.

3. Integrar la diferència de les funcions entre els punts de tall

L'àrea entre les corbes es calcula com la integral de la diferència de les funcions des de $x = 0$ fins a $x = 4$:

$$\begin{aligned}A &= \int_0^4 (f(x) - g(x)) dx \\A &= \int_0^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x)) dx \\A &= \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x) dx \\A &= \int_0^4 (8x - 2x^2) dx\end{aligned}$$

4. Calcular la integral

$$A = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx$$

Calculem la integral:

$$A = \int_0^4 8x dx - \int_0^4 2x^2 dx$$

$$\begin{aligned}\int 8x dx &= 8 \cdot \frac{x^2}{2} = 4x^2 \\ \int 2x^2 dx &= 2 \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{2x^3}{3}\end{aligned}$$

Avaluem les integrals als límits 0 i 4:

$$\left[4x^2\right]_0^4 - \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^4$$

$$\begin{aligned}&\left[4(4)^2\right] - \left[\frac{2(4)^3}{3}\right] \\&[4 \cdot 16] - \left[\frac{2 \cdot 64}{3}\right] \\&64 - \frac{128}{3}\end{aligned}$$

Simplificant:

$$64 - \frac{128}{3} = \frac{192}{3} - \frac{128}{3} = \frac{64}{3}$$

5. Aproximar en decimals

$$\frac{64}{3} \approx 21,33$$

Per tant, l'àrea de la superfície compresa entre les corbes $f(x) = 6x - x^2$ i $g(x) = x^2 - 2x$ és $\frac{64}{3}$ unitats quadrades, que és aproximadament 21,33 unitats quadrades.

Àrea entre les corbes $f(x) = 6x - x^2$ i $g(x) = x^2 - 2x$

