

P6. — Segui la funció

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1, & x \leq 0, \\ ax^2 + b(x + 3), & 0 < x \leq 1, \\ a \cos(\pi x) + 7bx, & x > 1. \end{cases}$$

(a) [5 punts] Calcula els valors de a i b per als quals la funció $f(x)$ és contínua.

Per garantir que la funció $f(x)$ és contínua, hem de assegurar-nos que no hi hagi saltos en els punts on la funció canvia de definició, és a dir, en $x = 0$ i en $x = 1$.

La funció $f(x)$ està definida per trams:

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1, & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + b(x + 3), & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a \cos(\pi x) + 7bx, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Contínua en $x = 0$

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 0$, les funcions de la dreta i l'esquerra del punt de canvi han de coincidir:

- La funció a l'esquerra (per $x \leq 0$) és $f(x) = be^x + a + 1$.
- La funció a la dreta (per $0 < x \leq 1$) és $f(x) = ax^2 + b(x + 3)$.

Ens cal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Calculem:

- A l'esquerra (per $x \leq 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = be^0 + a + 1 = b + a + 1$$

- A la dreta (per $0 < x \leq 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a \cdot 0^2 + b(0 + 3) = 3b$$

Per tant, hem de tenir:

$$b + a + 1 = 3b$$

Resolent aquesta equació:

$$a + 1 = 2b$$

$$a = 2b - 1$$

2. Contínua en $x = 1$

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 1$, les funcions de la dreta i l'esquerra del punt de canvi han de coincidir:

- La funció a l'esquerra (per $0 < x \leq 1$) és $f(x) = ax^2 + b(x + 3)$.
- La funció a la dreta (per $x > 1$) és $f(x) = a \cos(\pi x) + 7bx$.

Ens cal que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Calculem:

- A l'esquerra (per $0 < x \leq 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a \cdot 1^2 + b(1 + 3) = a + 4b$$

- A la dreta (per $x > 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cos(\pi \cdot 1) + 7b \cdot 1 = a \cos(\pi) + 7b$$

Sabent que $\cos(\pi) = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cdot (-1) + 7b = -a + 7b$$

Per tant, hem de tenir:

$$a + 4b = -a + 7b$$

Resolent aquesta equació:

$$2a + 4b = 7b$$

$$2a = 3b$$

$$a = \frac{3b}{2}$$

3. Resolució

Combina les dues equacions obtingudes:

1. $a = 2b - 1$

2. $a = \frac{3b}{2}$

Iguallem les dues expressions per a :

$$2b - 1 = \frac{3b}{2}$$

Multipliquem per 2 per eliminar el denominador:

$$4b - 2 = 3b$$

Resolent per b :

$$4b - 3b = 2$$

$$b = 2$$

Substituïm $b = 2$ en l'expressió per a :

$$a = \frac{3b}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Verifiquem amb l'altra equació:

$$a = 2b - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Ambdós resultats són consistents.

Resultats Finals

Els valors per als quals la funció $f(x)$ és contínua són:

$$a = 3$$

$$b = 2$$

(b) [5 punts] Siguin $a = 3$ i $b = 2$, calcula l'àrea compresa entre $x = -1$, $x = 0$ i l'eix OX .

1. Definir la funció per l'interval $x \leq 0$

Amb $a = 3$ i $b = 2$, la funció per $x \leq 0$ és:

$$f(x) = 2e^x + 4$$

2. Calcular l'àrea entre la corba i l'eix OX

L'àrea compresa entre la corba $f(x)$ i l'eix OX en l'interval $[-1, 0]$ es calcula amb la integral definida de la funció sobre aquest interval:

$$\text{Àrea} = \int_{-1}^0 (2e^x + 4) dx$$

Calculem aquesta integral en dos passos:

1. Integrar $2e^x$:

$$\int 2e^x dx = 2e^x$$

2. Integrar 4:

$$\int 4 dx = 4x$$

Combinen les dues integrals:

$$\int (2e^x + 4) dx = 2e^x + 4x$$

3. Aplicar els límits de la integral

Apliquem els límits de la integral de -1 a 0 :

$$[2e^x + 4x]_{-1}^0$$

Calculem el valor a $x = 0$:

$$2e^0 + 4 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$$

Calculem el valor a $x = -1$:

$$2e^{-1} + 4 \cdot (-1) = 2 \cdot \frac{1}{e} - 4$$

Per tant, la diferència és:

$$\text{Àrea} = \left(2 - \left(2 \cdot \frac{1}{e} - 4 \right) \right)$$

Simplifiquem:

$$\text{Àrea} = 2 - 2 \cdot \frac{1}{e} + 4$$

$$\text{Àrea} = 6 - \frac{2}{e}$$

4. Convertir el resultat a decimals

Utilitzant la constant $e \approx 2,718$:

$$\frac{2}{e} \approx \frac{2}{2,718} \approx 0,7358$$

Per tant:

$$\text{Àrea} \approx 6 - 0,7358 = 5,2642$$

Resultat Final

L'àrea compresa entre la corba $f(x) = 2e^x + 4$ i l'eix OX en l'interval $[-1, 0]$ és aproximadament **5,2642** unitats quadrades.