

P6. — En una població,

- el 50% d'habitants amb major poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 10%, i
- el 50% d'habitants amb menor poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 40%.

a) Quina és la probabilitat que, escollint un habitant a l'atzar, aquest visqui de lloguer? (4 pt)

Per resoldre el problema de la probabilitat que un habitant visqui de lloguer, podem utilitzar el teorema de la probabilidad total. Segons el problema, la població es divideix en dues categories segons el poder adquisitiu:

- **50% de la població amb major poder adquisitiu** que té una probabilitat de viure de lloguer del 10%.
- **50% de la població amb menor poder adquisitiu** que té una probabilitat de viure de lloguer del 40%.

Anomenem les següents variables:

- A_1 : L'esdeveniment que un habitant té un poder adquisitiu alt.
- A_2 : L'esdeveniment que un habitant té un poder adquisitiu baix.
- B : L'esdeveniment que un habitant viu de lloguer.

Sabem que:

- $P(A_1) = 0,5$ (probabilitat que un habitant tingui un poder adquisitiu alt)
- $P(A_2) = 0,5$ (probabilitat que un habitant tingui un poder adquisitiu baix)
- $P(B|A_1) = 0,1$ (probabilitat que un habitant amb poder adquisitiu alt visqui de lloguer)
- $P(B|A_2) = 0,4$ (probabilitat que un habitant amb poder adquisitiu baix visqui de lloguer)

Utilitzem el teorema de la probabilidad total per trobar la probabilitat total $P(B)$ que un habitant visqui de lloguer:

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)$$

Substituïm els valors coneguts:

$$P(B) = (0,1 \cdot 0,5) + (0,4 \cdot 0,5)$$

$$P(B) = 0,05 + 0,2$$

$$P(B) = 0,25$$

Per tant, la probabilitat que, escollint un habitant a l'atzar, aquest visqui de lloguer és **0,25** o **25%**.

- b) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, tots tres visquin de lloguer? (3 pt)

Per trobar la probabilitat que els tres habitants escollits independentment visquin de lloguer, podem utilitzar la probabilitat total $P(B)$ que hem calculat prèviament, i aplicar el concepte d'independència.

1. Probabilitat Total $P(B)$:

La probabilitat que un habitant visqui de lloguer és:

$$P(B) = 0,25$$

2. Probabilitat de tres habitants independents:

Si escollim tres habitants de manera independent, la probabilitat que tots tres visquin de lloguer és:

$$P(B \cap B \cap B) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B)$$

Atès que cada esdeveniment és independent:

$$P(B \cap B \cap B) = (0,25)^3$$

$$P(B \cap B \cap B) = 0,25 \times 0,25 \times 0,25$$

$$P(B \cap B \cap B) = 0,015625$$

Per tant, la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, tots tres visquin de lloguer és **0,015625** o **1,5625%**.

- c) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, almenys un dels tres visqui de lloguer? (3 pt)

Pas 1: Calcular la Probabilitat Complementària

Sabem que la probabilitat que un habitant visqui de lloguer és:

$$P(B) = 0,25$$

La probabilitat que un habitant no visqui de lloguer és:

$$P(B^c) = 1 - P(B)$$

$$P(B^c) = 1 - 0,25$$

$$P(B^c) = 0,75$$

Si escollim tres habitants de manera independent, la probabilitat que **cap** dels tres habitants visqui de lloguer és:

$$P(\text{cap visqui de lloguer}) = P(B^c) \cdot P(B^c) \cdot P(B^c)$$

$$P(\text{cap visqui de lloguer}) = (0,75) \cdot (0,75) \cdot (0,75)$$

$$P(\text{cap visqui de lloguer}) = (0,75)^3$$

$$P(\text{cap visqui de lloguer}) = 0,421875$$

Pas 2: Calcular la Probabilitat que Almenys Un Visqui de Lloguer

La probabilitat que almenys un dels tres habitants visqui de lloguer és el complement de la probabilitat que cap visqui de lloguer:

$$P(\text{almenys un visqui de lloguer}) = 1 - P(\text{cap visqui de lloguer})$$

$$P(\text{almenys un visqui de lloguer}) = 1 - 0,421875$$

$$P(\text{almenys un visqui de lloguer}) = 0,578125$$

Per tant, la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, almenys un dels tres visqui de lloguer és **0,578125** o **57,8125%**.