

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

[1,25 punts]

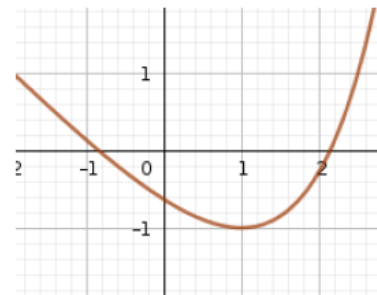
La funció és contínua per ser la suma de dues funcions contínues, l'exponencial i una polinòmica de primer grau.

Per analitzar-ne la monotonia estudiarem el signe de la derivada:

$f'(x) = e^{x-1} - 1 = 0$ per tant $e^{x-1} = 1$ d'on $x - 1 = 0$ i, així, $x = 1$ és un punt crític.

Fem la taula de comportament

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	decreix	–1	creix



La funció té un mínim relatiu (i absolut) en el punt $(1, -1)$, és monòtona decreixent en l'interval $(-\infty, 1)$ i monòtona creixent en l'interval $(1, +\infty)$.

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.

[1,25 punts]

Per demostrar si la funció té o no arrels aplicarem el teorema de Bolzano. En aquest cas la funció és contínua en tots els reals, per tant, ho és en qualsevol interval tancat, concretament en l'interval $[-1, 3]$.

Els tots dos extrems de l'interval la funció és positiva:

$$f(-1) = e^{-2} > 0 \text{ i } f(3) = e^2 - 4 > 0$$

Per altra banda, sabem que $f(1) < 0$ i que en $x = 1$ la funció té un mínim absolut. Així, pel teorema de Bolzano, podem afirmar que:

- existeix una arrel en l'interval obert $(-1, 1)$. Aquesta arrel és única ja que la funció és monòtona decreixent en aquest interval.
- existeix una altra arrel en l'interval $(1, 3)$ que també és única per ser monòtona creixent en aquest interval.

Així no pot existir cap altra arrel d'aquesta funció en l'interval donat.