

6. En els models matemàtics que s'utilitzen per a descriure l'evolució d'una malaltia, s'anomena R_0 el nombre mitjà de noves infeccions que cada persona infectada provoca en la població. Quan aquest nombre és inferior a 1, cada individu infectat transmet la malaltia, de mitjana, a menys d'una persona i la malaltia tendeix a desaparèixer. En canvi, si R_0 és més gran que 1, la malaltia s'estén i es produeix una epidèmia.

Quan es descobreix una vacuna efectiva contra la malaltia, es pot controlar l'epidèmia vacunant només una proporció p de la població. És el que es coneix com a *immunitat de grup*. Efectivament, un cop vacunada una proporció $p \in (0, 1)$ de la població, la nova R_0 , que s'anomena *efectiva* i es denota amb R_e , és el producte de la R_0 original per la proporció d'individus que no estan vacunats, $1 - p$. I s'aconsegueix controlar l'epidèmia si la R_e és inferior a 1.

- a) En el cas del xarampió, s'estima que $R_0 = 15$. Si analitzem una població amb un percentatge d'individus vacunats del 95 %, segons el model descrit, hi ha risc que es produeixi una epidèmia de xarampió en aquesta població?

[0,75 punts]

Sabem que $R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 15 \cdot (1 - 0,95) = 15 \cdot 0,05 = 0,75$. Com que aquest valor és inferior a 1, segons el model, no hi ha risc d'una epidèmia de xarampió.

- b) En el cas concret de l'anomenada *grip espanyola* del 1918, s'estima que $R_0 = 4$. Calculeu quin percentatge de població hauria calgut vacunar, com a mínim, per a aturar l'epidèmia d'aquesta malaltia.

[0,75 punts]

En el cas de la grip espanyola $R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 4 \cdot (1 - p)$. Imposem que

$$4 \cdot (1 - p) < 1$$

Aïllant la p tenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$. Per tant, caldria vacunar més d'un 75% de la població per aturar l'epidèmia.

- c) Expresseu, en general, el llindar de població mínima que cal vacunar en funció del valor R_0 d'una malaltia. Feu un esbós d'aquesta funció per als valors de R_0 entre 1 i 20. [1 punt]

El llindar de vacunació és donat per $R_0 \cdot (1 - p) < 1$. Aïllant, obtenim que cal que $p > 1 - \frac{1}{R_0}$. Per tant, la funció que ens determina el llindar del mínim de vacunació necessària, en funció de R_0 , és $p(R_0) = 1 - \frac{1}{R_0}$.

Per fer un esbós de la funció entre 1 i 20 podem buscar els valors de la funció en els dos extrems $p(1) = 0$ i $p(20) = \frac{19}{20} = 0.95$. També veiem que la funció és sempre creixent perquè la derivada és $p'(R_0) = \frac{1}{R_0^2} > 0$ i, per tant, no té extrems relatius.

La gràfica de la funció és:

