

**Problema 7.** Una empresa té 3 màquines de fabricació de llandes de refresc. El 10,25% de les llandes que fabrica l'empresa són defectuoses. El 30% de les llandes les fabrica en la primera màquina, i el 10% són defectuoses. El 25% de les llandes les fabrica en la segona màquina, i el 5% són defectuoses. La resta de les llandes les fabrica en la tercera màquina.

- a) Quina és la probabilitat que una llanda fabricada per la tercera màquina siga defectuosa? (4 punts)

1. Sabem que:

$$P(D) = 0,1025 = \frac{1025}{10000}$$

$$P(M_1) = 0,30 = \frac{3}{10}$$

$$P(D \mid M_1) = 0,10 = \frac{1}{10}$$

$$P(M_2) = 0,25 = \frac{1}{4}$$

$$P(D \mid M_2) = 0,05 = \frac{1}{20}$$

2. Calculem  $P(M_3)$ :

$$P(M_3) = 1 - P(M_1) - P(M_2)$$

$$P(M_3) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{4}$$

Calculem una fracció comuna:

$$P(M_3) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{6}{20} - \frac{5}{20} = 1 - \frac{11}{20} = \frac{20}{20} - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

3. Ara utilitzem la regla de la probabilitat total:

$$P(D) = P(D \mid M_1)P(M_1) + P(D \mid M_2)P(M_2) + P(D \mid M_3)P(M_3)$$

Substituïm les probabilitats conegudes:

$$\frac{1025}{10000} = \left( \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \right) + \left( \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{4} \right) + \left( P(D \mid M_3) \cdot \frac{9}{20} \right)$$

Simplifiquem:

$$\frac{1025}{10000} = \frac{3}{100} + \frac{1}{80} + P(D \mid M_3) \cdot \frac{9}{20}$$

4. Calculem la suma de les fraccions:

$$\frac{3}{100} = \frac{3 \cdot 1}{100 \cdot 1} = \frac{3}{100}$$

$$\frac{1}{80} = \frac{1 \cdot 5}{80 \cdot 5} = \frac{5}{400} = \frac{1}{80}$$

Convertim totes les fraccions a un denominador comú:

$$\frac{3}{100} = \frac{12}{400}$$

$$\frac{1}{80} = \frac{5}{400}$$

$$\frac{12}{400} + \frac{5}{400} = \frac{17}{400}$$

5. Substituïm la suma de les fraccions a l'equació original:

$$\frac{1025}{10000} = \frac{17}{400} + P(D \mid M_3) \cdot \frac{9}{20}$$

Simplifiquem el terme  $\frac{1025}{10000}$ :

$$\frac{1025}{10000} = \frac{41}{400}$$

Ara tenim:

$$\frac{41}{400} = \frac{17}{400} + P(D \mid M_3) \cdot \frac{9}{20}$$

6. Restem  $\frac{17}{400}$  de tots dos costats:

$$\frac{41}{400} - \frac{17}{400} = P(D \mid M_3) \cdot \frac{9}{20}$$

$$\frac{24}{400} = P(D \mid M_3) \cdot \frac{9}{20}$$

7. Simplifiquem la fracció:

$$\frac{24}{400} = \frac{3}{50}$$

Ara tenim:

$$\frac{3}{50} = P(D \mid M_3) \cdot \frac{9}{20}$$

8. Dividim per  $\frac{9}{20}$ :

$$P(D \mid M_3) = \frac{3}{50} \cdot \frac{20}{9}$$

Multipliquem les fraccions:

$$P(D \mid M_3) = \frac{3 \cdot 20}{50 \cdot 9} = \frac{60}{450} = \frac{2}{15}$$

9. Convertim la fracció en decimal:

$$\frac{2}{15} \approx 0,1333$$

Per tant, la probabilitat que una llanda fabricada per la tercera màquina sigui defectuosa és  $\frac{2}{15}$  o aproximadament 0,1333 (13,33%).

- b) Si es tria una llanda a l'atzar i no és defectuosa, quina és la probabilitat que procedisca de la primera màquina? (3 punts)

Per trobar la probabilitat que una llanda no defectuosa procedeixi de la primera màquina, podem utilitzar el teorema de Bayes. Anem a trobar la probabilitat que una llanda no sigui defectuosa i que procedeixi de la primera màquina.

Definim els següents esdeveniments:

- $D$ : Llanda defectuosa
- $D^c$ : Llanda no defectuosa
- $M_1$ : Llanda fabricada per la màquina 1

Sabem que:

- $P(M_1) = 0,30$
- $P(D \mid M_1) = 0,10$
- $P(D) = 0,1025$

Calculem  $P(D^c)$ :

$$P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - 0,1025 = 0,8975$$

Volem trobar  $P(M_1 | D^c)$ , que és la probabilitat que una llanda procedisca de la màquina 1 donat que no és defectuosa.

Utilitzem el teorema de Bayes:

$$P(M_1 | D^c) = \frac{P(D^c | M_1) \cdot P(M_1)}{P(D^c)}$$

Sabem que:

$$P(D^c | M_1) = 1 - P(D | M_1) = 1 - 0,10 = 0,90$$

Aleshores:

$$P(M_1 | D^c) = \frac{P(D^c | M_1) \cdot P(M_1)}{P(D^c)} = \frac{0,90 \cdot 0,30}{0,8975}$$

Calculem:

$$P(M_1 | D^c) = \frac{0,90 \cdot 0,30}{0,8975} = \frac{0,27}{0,8975}$$

Finalment, calculem la fracció en decimal:

$$P(M_1 | D^c) = \frac{0,27}{0,8975} \approx 0,3008$$

Per tant, la probabilitat que una llanda no defectuosa procedisca de la primera màquina és aproximadament 0,3008 o el 30,08%.

- c) Si es tria una llanda a l'atzar i és defectuosa, quina és la probabilitat que no haja sigut fabricada en la segona màquina? (3 punts)

### Dades i esdeveniments:

Tenim tres màquines i les probabilitats relacionades amb les llandes defectuoses i les màquines són les següents:

- $D$ : Llanda defectuosa
- $M_1$ : Llanda fabricada per la màquina 1
- $M_2$ : Llanda fabricada per la màquina 2
- $M_3$ : Llanda fabricada per la màquina 3

Les probabilitats donades són:

- $P(M_1) = 0,30$
- $P(M_2) = 0,25$
- $P(M_3) = 0,45$
- $P(D | M_1) = 0,10$
- $P(D | M_2) = 0,05$
- $P(D | M_3) = \frac{2}{15}$
- $P(D) = 0,1025$

### Pas 1: Calcular $P(M_2 | D)$

Primer, calculem la probabilitat condicionada que una llanda sigui fabricada per la màquina 2 donat que és defectuosa,  $P(M_2 | D)$ , utilitzant el teorema de Bayes:

$$P(M_2 | D) = \frac{P(D|M_2) \cdot P(M_2)}{P(D)}$$

On:

- $P(D | M_2) = 0,05$  és la probabilitat que una llanda sigui defectuosa si és fabricada per la màquina 2.
- $P(M_2) = 0,25$  és la probabilitat que una llanda sigui fabricada per la màquina 2.
- $P(D) = 0,1025$  és la probabilitat total de que una llanda sigui defectuosa.

Calculem-ho:

$$P(M_2 | D) = \frac{0,05 \cdot 0,25}{0,1025}$$

$$P(M_2 | D) = \frac{0,0125}{0,1025}$$

Per simplificar la fracció, multipliquem tant el numerador com el denominador per 10000:

$$P(M_2 | D) = \frac{125}{1025}$$

Divideixem 125 per 1025:

$$P(M_2 | D) = 0,1219512195$$

## Pas 2: Calcular $P(M_2^c | D)$

Ara calculem la probabilitat que una llanda defectuosa no hagi sigut fabricada en la segona màquina, que és  $P(M_2^c | D)$ . Aquesta és la probabilitat complementària de  $P(M_2 | D)$ .

$$P(M_2^c | D) = 1 - P(M_2 | D)$$

$$P(M_2^c | D) = 1 - 0,1219512195$$

$$P(M_2^c | D) = 0,8780487805$$

## Resultat final

Per tant, la probabilitat que una llanda defectuosa no hagi sigut fabricada en la segona màquina és aproximadament 0,8780 o el 87,80%.