

Problema 7. Una bossa conté dues monedes que anomenem M_1 i M_2 . La moneda M_1 és una moneda trucada que té impresa una cara en un dels seus costats i una creu en l'altre. La probabilitat d'obtenir cara amb la moneda M_1 és de 0,6. La moneda M_2 té una cara impresa en tots dos costats.

a) Triem una moneda a l'atzar de la bossa, la llancem, anotem el resultat i la retornem a la bossa. Repetim aquesta acció tres vegades.

1. Quina és la probabilitat d'haver obtingut tres cares? (3 punts)

1. Calcula la probabilitat de cara en un llançament, tenint en compte la selecció aleatòria de la moneda

Probabilitat de cara en un llançament amb cada moneda:

- Moneda M_1 :
 - Probabilitat de cara: $P(C \mid M_1) = 0,6$.
- Moneda M_2 :
 - Probabilitat de cara: $P(C \mid M_2) = 1$.

Probabilitat de triar cada moneda:

- Moneda M_1 : $P(M_1) = \frac{1}{2}$.
- Moneda M_2 : $P(M_2) = \frac{1}{2}$.

2. Utilitzar la regla de la probabilitat total per calcular la probabilitat d'obtenir cara en un llançament

La probabilitat d'obtenir cara en un llançament és:

$$P(C) = P(C \mid M_1) \cdot P(M_1) + P(C \mid M_2) \cdot P(M_2)$$

Substituint els valors:

$$P(C) = (0,6 \cdot \frac{1}{2}) + (1 \cdot \frac{1}{2})$$

$$P(C) = 0,3 + 0,5$$

$$P(C) = 0,8$$

3. Trobar la probabilitat d'obtenir tres cares en tres llançaments

Ara utilitzem aquesta probabilitat per calcular la probabilitat d'obtenir tres cares en tres llançaments independents.

La probabilitat d'obtenir tres cares és:

$$P(3 \text{ cares}) = P(C)^3$$

Substituint $P(C)$:

$$P(3 \text{ cares}) = 0,8^3$$

$$P(3 \text{ cares}) = 0,512$$

Conclusió: La probabilitat d'obtenir tres cares en tres llançaments és **0,512**.

2. Quina és la probabilitat d'haver obtingut exactament una creu?

(3 punts)

1. Calcula la probabilitat de treure una creu en un únic llançament

Probabilitat de creu per cada moneda:

- Moneda M_1 :
 - Probabilitat de cara ($P(C \mid M_1) = 0,6$)
 - Probabilitat de creu ($P(K \mid M_1) = 1 - 0,6 = 0,4$)
- Moneda M_2 :
 - Probabilitat de cara ($P(C \mid M_2) = 1$)
 - Probabilitat de creu ($P(K \mid M_2) = 0$ (no hi ha creu en aquesta moneda)

Probabilitat de seleccionar cada moneda:

- Probabilitat de triar la moneda M_1 ($P(M_1) = \frac{1}{2}$)
- Probabilitat de triar la moneda M_2 ($P(M_2) = \frac{1}{2}$)

Utilitzem la regla de la probabilitat total per trobar la probabilitat de treure una creu en un únic llançament:

$$P(K) = P(K \mid M_1) \cdot P(M_1) + P(K \mid M_2) \cdot P(M_2)$$

Substituint els valors:

$$P(K) = (0,4 \cdot \frac{1}{2}) + (0 \cdot \frac{1}{2})$$

$$P(K) = 0,4 \cdot 0,5 + 0$$

$$P(K) = 0,2$$

2. Trobar la probabilitat d'obtenir exactament una creu en tres llançaments

Ara que sabem la probabilitat de treure una creu en un únic llançament és 0,2, utilitzarem aquesta probabilitat per calcular la probabilitat d'obtenir exactament una creu en tres llançaments.

Distribució Binomial:

La probabilitat d'obtenir exactament una creu en tres llançaments segueix una distribució binomial amb $n = 3$ experiments i una probabilitat $p = 0,2$ de creu per cada experiment:

$$P(\text{exactament 1 creu}) = \binom{3}{1} \cdot (P(K))^1 \cdot (1 - P(K))^2$$

On:

- $\binom{3}{1} = 3$ (nombre de maneres de col·locar 1 creu en 3 llançaments)
- $P(K) = 0,2$ (probabilitat de creu)
- $1 - P(K) = 0,8$ (probabilitat de cara)

Substituint els valors:

$$P(\text{exactament 1 creu}) = 3 \cdot 0,2 \cdot (0,8)^2$$

$$P(\text{exactament 1 creu}) = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,64$$

$$P(\text{exactament 1 creu}) = 3 \cdot 0,128$$

$$P(\text{exactament 1 creu}) = 0,384$$

Conclusió

La probabilitat d'obtenir exactament una creu en tres llançaments és **0,384**.

- b) Es tria a l'atzar una moneda de la bossa, es llança dues vegades i s'observen dues cares. Calcular la probabilitat que la moneda seleccionada siga la moneda M_1 . Responen a la mateixa pregunta per a la moneda M_2 . (4 punts)

1. Probabilitat que la moneda seleccionada sigui M_1 donat que s'han obtingut dues cares

Donats:

- $P(M_1)$ = Probabilitat de seleccionar la moneda $M_1 = \frac{1}{2}$
- $P(M_2)$ = Probabilitat de seleccionar la moneda $M_2 = \frac{1}{2}$

Probabilitat d'obtenir dues cares amb cada moneda:

- Moneda M_1 :
 - La probabilitat d'obtenir cara en un llançament és 0,6.
 - La probabilitat d'obtenir dues cares en dos llançaments és:

$$P(2 \text{ cares} \mid M_1) = (0,6)^2 = 0,36$$

- Moneda M_2 :
 - La probabilitat d'obtenir cara en un llançament és 1.
 - La probabilitat d'obtenir dues cares en dos llançaments és:

$$P(2 \text{ cares} \mid M_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

Probabilitat total d'obtenir dues cares:

Utilitzem la regla de la probabilitat total:

$$P(2 \text{ cares}) = P(2 \text{ cares} \mid M_1) \cdot P(M_1) + P(2 \text{ cares} \mid M_2) \cdot P(M_2)$$

$$P(2 \text{ cares}) = (0,36 \cdot \frac{1}{2}) + (1 \cdot \frac{1}{2})$$

$$P(2 \text{ cares}) = 0,18 + 0,5$$

$$P(2 \text{ cares}) = 0,68$$

Probabilitat que la moneda sigui M_1 donat que s'han obtingut dues cares:

Utilitzem el teorema de Bayes:

$$P(M_1 | 2 \text{ cares}) = \frac{P(2 \text{ cares} | M_1) \cdot P(M_1)}{P(2 \text{ cares})}$$

$$P(M_1 | 2 \text{ cares}) = \frac{0,36 \cdot \frac{1}{2}}{0,68}$$

$$P(M_1 | 2 \text{ cares}) = \frac{0,18}{0,68}$$

$$P(M_1 | 2 \text{ cares}) \approx 0,2647$$

2. Probabilitat que la moneda seleccionada sigui M_2 donat que s'han obtingut dues cares

Probabilitat que la moneda sigui M_2 donat que s'han obtingut dues cares:

Utilitzem el teorema de Bayes:

$$P(M_2 | 2 \text{ cares}) = \frac{P(2 \text{ cares} | M_2) \cdot P(M_2)}{P(2 \text{ cares})}$$

$$P(M_2 \mid 2 \text{ cares}) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{0,68}$$

$$P(M_2 \mid 2 \text{ cares}) = \frac{0,5}{0,68}$$

$$P(M_2 \mid 2 \text{ cares}) \approx 0,7353$$

Conclusió

1. La probabilitat que la moneda seleccionada sigui M_1 donat que s'han obtingut dues cares és aproximadament **0,2647**.
2. La probabilitat que la moneda seleccionada sigui M_2 donat que s'han obtingut dues cares és aproximadament **0,7353**.