

P7. — La probabilitat que plogui un dia qualsevol és sempre la mateixa. Ara bé, si un dia qualsevol ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 40%; i si un dia qualsevol no ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 5%.

Considera els esdeveniments següents:

- A : Avui ha plogut.
- B : Demà plourà.

a) Calcula $P(A)$ i $P(B)$. (5 pt)

Per calcular les probabilitats $P(A)$ i $P(B)$ en el context donat, utilitzarem la informació sobre les probabilitats condicionals proporcionades.

Definicions

- A : Avui ha plogut.
- B : Demà plourà.

La informació proporcionada és:

1. Si ha plogut avui (esdeveniment A), la probabilitat que plogui demà (B) és del 40%. Això es pot expressar com:

$$P(B|A) = 0,40$$

2. Si no ha plogut avui (esdeveniment A^c), la probabilitat que plogui demà (B) és del 5%. Això es pot expressar com:

$$P(B|A^c) = 0,05$$

a) Calcular $P(A)$ i $P(B)$

Per calcular $P(A)$ i $P(B)$, utilitzarem el teorema de Bayes i el teorema de la probabilitat total.

1. Càlcul de $P(A)$

Nota: La probabilitat que plogui qualsevol dia $P(A)$ no es proporciona directament. No obstant això, podem calcular $P(A)$ a partir del coneixement de les probabilitats condicionals i de la informació que la probabilitat de pluja és constant. Anomenem $P(A)$ com a p .

2. Càlcul de $P(B)$

Per calcular $P(B)$, utilitzarem el teorema de la probabilitat total, que ens permet calcular la probabilitat d'un esdeveniment B com una suma ponderada de les probabilitats condicionals sobre les partitions de l'espai mostral (plou o no plou avui):

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$$

On:

- $P(A^c) = 1 - P(A)$ (la probabilitat que no plogui avui)

Substituïm les probabilitats condicionals donades:

$$P(B) = 0,40 \cdot P(A) + 0,05 \cdot (1 - P(A))$$

Simplifiquem aquesta expressió:

$$P(B) = 0,40 \cdot P(A) + 0,05 - 0,05 \cdot P(A)$$

$$P(B) = 0,40 \cdot P(A) - 0,05 \cdot P(A) + 0,05$$

$$P(B) = 0,35 \cdot P(A) + 0,05$$

Per trobar $P(A)$, cal reconèixer que en un escenari estable, les probabilitats haurien d'estar en equilibri a llarg termini. En aquest cas, la probabilitat de pluja $P(A)$ s'ha d'ajustar perquè $P(B)$ sigui la mateixa en una situació a llarg termini. Això es resol amb:

$$P(A) = P(B)$$

Substituïm $P(B) = P(A)$:

$$P(A) = 0,35 \cdot P(A) + 0,05$$

$$P(A) - 0,35 \cdot P(A) = 0,05$$

$$0,65 \cdot P(A) = 0,05$$

$$P(A) = \frac{0,05}{0,65}$$

$$P(A) \approx 0,0769$$

Així, la probabilitat que plogui avui ($P(A)$) és aproximadament **0,0769** o **7,69%**.

Substituïm $P(A)$ en la fórmula per $P(B)$:

$$P(B) = 0,35 \cdot 0,0769 + 0,05$$

$$P(B) = 0,0269 + 0,05$$

$$P(B) = 0,0769$$

Per tant, la probabilitat que plogui demà ($P(B)$) és **0,0769** o **7,69%**.

Això coincideix amb la probabilitat que plogui avui en un escenari a llarg termini.

- b) Què és més probable: que plogui demà si sabem que ha plogut avui; o bé que plogui avui si sabem que demà segur que plourà? (5 pt)

Per determinar quina situació és més probable, compararem les dues probabilitats següents:

1. La probabilitat que plogui demà si sabem que ha plogut avui, és a dir, $P(B|A)$.
2. La probabilitat que plogui avui si sabem que demà plourà, és a dir, $P(A|B)$.

Utilitzarem el teorema de Bayes per calcular $P(A|B)$.

1. Probabilitat que plogui demà si sabem que ha plogut avui

Aquesta probabilitat ja la tenim directament:

$$P(B|A) = 0,40$$

2. Probabilitat que plogui avui si sabem que demà plourà

Utilitzarem el teorema de Bayes per calcular aquesta probabilitat:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Ja hem calculat:

- $P(A) \approx 0,0769$ (probabilitat que plogui avui)
- $P(B) \approx 0,0769$ (probabilitat que plogui demà)
- $P(B|A) = 0,40$ (probabilitat que plogui demà si ha plogut avui)

Substituïm aquests valors a la fórmula:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{0,40 \cdot 0,0769}{0,0769}$$

$$P(A|B) = \frac{0,40 \cdot 0,0769}{0,0769}$$

$$P(A|B) = 0,40$$

Comparació

- La probabilitat que plogui demà si sabem que ha plogut avui és $P(B|A) = 0,40$.
- La probabilitat que plogui avui si sabem que demà plourà és $P(A|B) = 0,40$.

Ambdós valors són iguals, **0,40** o **40%**. Per tant, **ambdues probabilitats són iguals** en aquest cas.

En resum, **no hi ha cap opció que sigui més probable que l'altra**.