

P7. — Siguin A i B dos successos d'un mateix espai mostral tals que satisfan que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.1$ i $P(A \cap B^c) = 0.35$ (sent B^c el succés complementari de B), calcula:

(a) [3 punts] $P(A)$.

Per trobar $P(A)$, utilitzarem les següents dades i fórmules relacionades amb les probabilitats dels esdeveniments:

1. Dades donades:

- $P(A \cup B) = 0,7$
- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(A \cap B^c) = 0,35$

On B^c és el complementari de B .

2. Utilitzar la fórmula de la probabilitat de la unió de dos esdeveniments:

La fórmula general per la probabilitat de la unió de dos esdeveniments és:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3. Utilitzar la fórmula de la probabilitat del complementari:

La probabilitat d'un esdeveniment i el seu complementari sumen 1, així que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

4. Calcular $P(A)$:

Utilitzem la fórmula del complementari:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Substituïm els valors donats:

$$P(A) = 0,1 + 0,35$$

$$P(A) = 0,45$$

Resultat Final

La probabilitat de l'esdeveniment A és **0,45**.

(b) [3 punts] $P(B)$.

Per trobar $P(B)$, utilitzarem la informació donada i la fórmula relacionada amb les probabilitats d'esdeveniments. Ja tenim:

1. Dades donades:

- $P(A \cup B) = 0,7$
- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(A \cap B^c) = 0,35$

I sabem que:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

On hem calculat anteriorment:

$$P(A) = 0,45$$

2. Utilitzar la fórmula de la probabilitat de la unió de dos esdeveniments:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Substituïm els valors donats i el valor de $P(A)$:

$$0,7 = 0,45 + P(B) - 0,1$$

3. Resoldre per $P(B)$:

Simplifiquem l'equació:

$$0,7 = 0,45 - 0,1 + P(B)$$

$$0,7 = 0,35 + P(B)$$

Després restem 0,35 de cada costat:

$$P(B) = 0,7 - 0,35$$

$$P(B) = 0,35$$

Resultat Final

La probabilitat de l'esdeveniment B és 0,35.

(c) [2 punts] $P(A^c \cup B^c)$.

Per calcular $P(A^c \cup B^c)$, utilitzarem les següents fórmules i dades:

1. Dades donades:

- $P(A \cup B) = 0,7$
- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(A \cap B^c) = 0,35$
- $P(A) = 0,45$
- $P(B) = 0,35$

2. Fórmula per $P(A^c \cup B^c)$:

Utilitzarem la fórmula de De Morgan per convertir l'unió de complements en una forma més manejable:

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$$

on $A \cap B$ és l'esdeveniment complementari de $A^c \cup B^c$, és a dir:

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$$

A més, hem de recordar que:

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

Utilitzant la fórmula de De Morgan, sabem que:

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B)$$

Substituïm $P(A \cap B)$ que és 0,1:

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - 0,1$$

$$P(A^c \cup B^c) = 0,9$$

Resultat Final

La probabilitat de l'esdeveniment $A^c \cup B^c$ és **0,9**.

(d) [2 punts] Són A i B successos independents?

Per determinar si els esdeveniments A i B són independents, podem utilitzar la condició d'independència basada en la probabilitat condicional:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Els esdeveniments A i B són independents si i només si:

$$P(B | A) = P(B)$$

Dades donades:

- $P(A) = 0,45$
- $P(B) = 0,35$
- $P(A \cap B) = 0,1$

Càlcul de $P(B | A)$:

Utilitzem la fórmula de la probabilitat condicional:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Substituïm els valors donats:

$$P(B | A) = \frac{0,1}{0,45}$$

Realitzem la divisió:

$$P(B | A) = \frac{0,1}{0,45} \approx 0,2222$$

Comparar amb $P(B)$:

Compareu aquest resultat amb $P(B)$:

$$P(B) = 0,35$$

Comprovem si:

$$P(B | A) \approx 0,2222 \neq P(B) = 0,35$$

Resultat Final

Com que $P(B | A) \neq P(B)$, els esdeveniments A i B no són independents.