

Problema 8. S'ha determinat que en el 60% dels missatges enviats per WhatsApp s'afeg una emoticona. Una persona envia deu missatges de WhatsApp. Es demana la probabilitat que:

- a) Cap missatge dels deu tinga emoticones. (3 punts)

Per resoldre aquest problema, utilitzarem el concepte de probabilitat i la distribució binomial, ja que estem interessats en la probabilitat que cap dels deu missatges contingui una emoticona.

Dades:

- La probabilitat que un missatge contingui una emoticona és $p = 0,60$.
- La persona envia 10 missatges.

La probabilitat que cap dels deu missatges contingui una emoticona es calcula com la probabilitat que cap missatge contingui una emoticona, elevada a la potència del nombre total de missatges.

$$P(\text{cap missatge amb emoticona}) = (1 - p)^{10}$$

$$\text{On } 1 - p = 1 - 0,60 = 0,40.$$

Calculant aquest valor:

$$P(\text{cap missatge amb emoticona}) = 0,40^{10} \approx 0,0001049$$

Per tant, la probabilitat que cap dels deu missatges contingui una emoticona, amb quatre xifres decimals, és aproximadament 0,0001.

b) Exactament dues cinquenes parts dels missatges tinguen emoticones.

(3 punts)

Exactament dues cinquenes parts dels 10 missatges significa que 4 missatges (és a dir, $k = 4$) continguin emoticones.

Utilitzem la fórmula de la distribució binomial:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot (0,60)^4 \cdot (0,40)^6$$

Calculem les parts:

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$$(0,60)^4 = 0,1296$$

$$(0,40)^6 = 0,004096$$

Multipliquem aquests valors:

$$P(X = 4) = 210 \cdot 0,1296 \cdot 0,004096$$

$$0,1296 \cdot 0,004096 = 0,0005308416$$

$$210 \cdot 0,0005308416 = 0,111477$$

Per tant, la probabilitat que exactament 4 dels 10 missatges continguin una emoticona és 0,1115, arrodonint a quatre decimals.

c) Huit o més missatges tinguen emoticones.

(4 punts)

Per calcular la probabilitat que 8 o més missatges dels 10 enviats tinguin emoticones, sumarem les probabilitats de tenir exactament 8, 9 i 10 missatges amb emoticones. Utilitzarem la fórmula de la distribució binomial per cada cas.

La fórmula de la distribució binomial és:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

On:

- $n = 10$ (nombre total de missatges)
- $p = 0,60$ (probabilitat d'una emoticona en un missatge)
- $1 - p = 0,40$ (probabilitat que un missatge no contingui una emoticona)

1. Probabilitat de 8 missatges amb emoticones ($k = 8$):

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot (0,60)^8 \cdot (0,40)^2$$

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

$$(0,60)^8 = 0,01679616$$

$$(0,40)^2 = 0,16$$

$$P(X = 8) = 45 \cdot 0,01679616 \cdot 0,16$$

$$P(X = 8) = 45 \cdot 0,0026873856$$

$$P(X = 8) = 0,120932352$$

2. Probabilitat de 9 missatges amb emoticones ($k = 9$):

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot (0,60)^9 \cdot (0,40)^1$$

$$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$$

$$(0,60)^9 = 0,010077696$$

$$(0,40)^1 = 0,40$$

$$P(X = 9) = 10 \cdot 0,010077696 \cdot 0,40$$

$$P(X = 9) = 10 \cdot 0,0040310784$$

$$P(X = 9) = 0,040310784$$

3. Probabilitat de 10 missatges amb emoticones ($k = 10$):

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot (0,60)^{10} \cdot (0,40)^0$$

$$\binom{10}{10} = 1$$

$$(0,60)^{10} = 0,0060466176$$

$$(0,40)^0 = 1$$

$$P(X = 10) = 1 \cdot 0,0060466176 \cdot 1$$

$$P(X = 10) = 0,0060466176$$

Sumar les probabilitats:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X \geq 8) = 0,120932352 + 0,040310784 + 0,0060466176$$

$$P(X \geq 8) = 0,1672897536$$

Per tant, la probabilitat que 8 o més missatges tinguin emoticones és aproximadament 0,1673, arrodonint a quatre decimals.

Pas 1: Entendre la propietat simètrica

En la distribució binomial, la probabilitat que X sigui menor o igual a k és equivalent a la probabilitat que X sigui major o igual a $n - k$, on n és el nombre d'experiments (missatges) i k és el nombre d'èxits (missatges amb emoticones).

Pas 2: Aplicar la propietat simètrica

Per calcular $P(X \geq 8)$, que és la probabilitat que almenys 8 missatges tinguin emoticones, podem utilitzar:

$$P(X \geq 8) = P(X \leq 2)$$

Això és perquè $P(X \geq 8) = P(X \leq 10 - 8) = P(X \leq 2)$.

Pas 3: Utilitzar la taula de distribució binomial

Com la taula de distribució binomial només cobreix fins a $p = 0,5$, calculem $P(X \leq 2)$ per $p = 0,4$ (ja que $1 - 0,6 = 0,4$).

El valor aproximat de **0,1673** que ens dona la taula indica la probabilitat que com a màxim 2 dels 10 missatges enviats no continguin una emoticona.