

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

- a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)

Per resoldre el problema, utilitzarem la distribució binomial, que és adequada per a situacions on tenim un nombre fix d'assaigs independents (en aquest cas, les telefonades), cada un amb dos possibles resultats (vendre o no vendre), i la mateixa probabilitat de successos en cada assaig.

En aquest cas:

- La probabilitat de no aconseguir una venda en una telefonada és del 30%, o $p = 0,30$.
- La probabilitat d'aconseguir una venda en una telefonada és $1 - p = 0,70$.
- El nombre total de telefonades (assaigs) és $n = 10$.

Volem calcular la probabilitat que el comercial aconseguixi més de 7 vendes. Això significa que volem trobar la probabilitat que el nombre de vendes X sigui 8, 9 o 10.

La distribució binomial es defineix per la fórmula:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

on $\binom{n}{k}$ és el coeficient binomial, que es calcula com:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Per tant, per trobar la probabilitat que el comercial aconseguixi més de 7 vendes, necessitem sumar les probabilitats de tenir exactament 8, 9 i 10 vendes:

$$P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

On:

$$P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot (0,70)^k \cdot (0,30)^{10-k}$$

Calculem cada terme per separat:

1. Probabilitat d'obtenir exactament 8 vendes:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot (0,70)^8 \cdot (0,30)^2$$

On:

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$$

Càlcul:

$$(0,70)^8 = 0,05764801$$

$$(0,30)^2 = 0,09$$

Per tant:

$$P(X = 8) = 45 \cdot 0,05764801 \cdot 0,09$$

$$P(X = 8) = 45 \cdot 0,0051883209$$

$$P(X = 8) = 0,2335$$

2. Probabilitat d'obtenir exactament 9 vendes:

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot (0,70)^9 \cdot (0,30)^1$$

On:

$$\binom{10}{9} = \frac{10!}{9! \cdot 1!} = 10$$

Càlcul:

$$(0,70)^9 = 0,040353607$$

$$(0,30)^1 = 0,30$$

Per tant:

$$P(X = 9) = 10 \cdot 0,040353607 \cdot 0,30$$

$$P(X = 9) = 10 \cdot 0,0121060821$$

$$P(X = 9) = 0,1211$$

3. Probabilitat d'obtenir exactament 10 vendes:

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot (0,70)^{10} \cdot (0,30)^0$$

On:

$$\binom{10}{10} = 1$$

Càlcul:

$$(0,70)^{10} = 0,028247525$$

Per tant:

$$P(X = 10) = 1 \cdot 0,028247525$$

$$P(X = 10) = 0,0282$$

Sumem les probabilitats:

$$P(X > 7) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X > 7) = 0,2335 + 0,1211 + 0,0282$$

$$P(X > 7) = 0,3828$$

Resposta final:

La probabilitat que el comercial aconseguixi més de 7 vendes és **0,3828** o **38,28%**.

Per resoldre el problema utilitzant una taula de distribució binomial, primer hem de transformar les dades per ajustar-les a una situació en què la probabilitat d'èxit p sigui menor o igual a 0,5. Això és útil perquè moltes taules de distribució binomial estan dissenyades per a casos on la probabilitat d'èxit p és menor o igual a 0,5.

En el nostre cas, la probabilitat d'èxit $p = 0,70$, que és superior a 0,5. Per adaptar-nos a aquesta taula, utilitzarem la propietat de la distribució binomial que permet transformar el problema en un problema equivalent amb $p \leq 0,5$.

Càlculs

1. Utilitzem la simetria:

Si $p = 0,70$ i $n = 10$, podem transformar el problema en un problema equivalent amb $p = 0,30$ (ja que $p + q = 1$):

$$P(X > 7) = P(Y < 3)$$

On Y és la variable aleatòria amb $n = 10$ i $p = 0,30$, i volem trobar $P(Y \leq 2)$ amb la taula.

2. Busquem a la taula de distribució binomial:

La taula ens dona:

$$P(Y \leq 2) = 0,3828$$

Això és la probabilitat que Y (amb $p = 0,30$ i $n = 10$) sigui com a màxim 2.

3. Conclusió:

Així que:

$$P(X > 7) = P(Y \leq 2) = 0,3828$$

Resum

La probabilitat que el comercial aconsegueixi més de 7 vendes en 10 telefonades, utilitzant la taula per a $p \leq 0,5$ i el valor de $P(Y \leq 2) = 0,3828$, és 0,3828 o **38,28%**.

b) Calculeu la probabilitat que aconseguisca almenys 5 vendes.

(3 punts)

Utilitzarem la transformació per adaptar el problema perquè la taula de distribució binomial sigui aplicable. Recorda que $q = 1 - p$.

1. Transformació del problema:

Convertirem la probabilitat original de $p = 0,70$ en una probabilitat equivalent amb $q = 0,30$:

$P(X \geq 5)$ amb $p = 0,70$ és equivalent a $P(Y \leq 5)$ amb $q = 0,30$, on Y segueix una distribució binomial amb $n = 10$ i $q = 0,30$.

2. Càlculs amb el valor de la taula proporcionat:

Sabem que $P(Y \leq 5) = 0,9527$ segons la taula de distribució binomial.

3. Conclusió:

Per tant, la probabilitat que el comercial aconseguixi almenys 5 vendes en 10 telefonades és:

$$P(X \geq 5) = P(Y \leq 5) = 0,9527$$

Resum

La probabilitat que el comercial aconseguixi almenys 5 vendes en 10 telefonades, utilitzant la taula de distribució binomial per a $q = 0,30$ i el valor de $P(Y \leq 5) = 0,9527$, és **0,9527** o **95,27%**.

Ara, amb el valor exacte proporcionat, tenim la resposta precisa al problema plantejat.

- c) Calculeu la probabilitat que aconseguisca un mínim de 3 vendes i un màxim de 8 vendes. (4 punts)

Volem calcular la probabilitat que el nombre de vendes sigui entre 3 i 8 (inclusivament), és a dir, $P(3 \leq X \leq 8)$.

Transformació

Amb $p = 0,70$ i $q = 0,30$:

- La probabilitat $P(X \geq 3)$ amb $p = 0,70$ es converteix en $P(Y \leq 7)$ amb $q = 0,30$.
- La probabilitat $P(X \leq 8)$ amb $p = 0,70$ es converteix en $P(Y \geq 2)$ amb $q = 0,30$.

Així, el problema es converteix en calcular:

$$P(3 \leq X \leq 8) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1)$$

Càlculs

1. Utilitzar els valors proporcionats:

- $P(Y \leq 7) = 0,9984$
- $P(Y \leq 1) = 0,1493$

2. Calcular la probabilitat que X estigui entre 3 i 8:

$$P(3 \leq X \leq 8) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1)$$

$$P(3 \leq X \leq 8) = 0,9984 - 0,1493$$

$$P(3 \leq X \leq 8) = 0,8491$$

Resum

La probabilitat que el comercial aconseguixi entre 3 i 8 vendes (inclusivament) en 10 telefonades, utilitzant la taula de distribució binomial per a $q = 0,30$ i els valors proporcionats $P(Y \leq 7) = 0,9984$ i $P(Y \leq 1) = 0,1493$, és **0,8491** o **84,91%**.