

P8. — Una empresa que fabrica components electrònics realitza un estudi sobre la vida útil dels seus productes. Amb una mostra aleatòria de 50 components electrònics, el temps mitjà de vida útil és de 507 hores. Suposem que el temps de vida útil segueix una distribució normal i que la seva desviació típica és coneguda i igual a 150 hores.

- a) Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional de la vida útil dels components amb un nivell de confiança del 75%. (5 pt)

Dades proporcionades:

- Mida de la mostra (n): 50
- Mitjana de la mostra ($\bar{x}$): 507 hores
- Desviació típica (σ): 150 hores
- Nivell de confiança: 75%

1. Trobar el valor z corresponent al nivell de confiança

Per un interval de confiança del 75%, l'àrea total fora de l'interval és 25%, així que l'àrea en cada cua és 12,5% ($\alpha/2$). El percentil corresponent al 87,5% de la distribució normal (100% - 12,5%) té un valor z aproximat de 1,15, segons les taules de distribució normal.

2. Calcular l'error estàndard de la mitjana

L'error estàndard (SE) es calcula com:

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{150}{\sqrt{50}} \approx \frac{150}{7,071} \approx 21,21$$

3. Calcular l'interval de confiança

L'interval de confiança es calcula com:

$$IC = \bar{x} \pm z \cdot SE$$

On:

$$IC = 507 \pm 1,15 \cdot 21,21$$

Calculant l'error marginal:

$$1,15 \cdot 21,21 \approx 24,39$$

L'interval de confiança és:

$$IC = [507 - 24,39, 507 + 24,39] = [482,61, 531,39]$$

Resum

L'interval de confiança per a la mitjana poblacional de la vida útil dels components amb un nivell de confiança del 75% és:

$$IC = [482,61; 531,39]$$

- b) Suposant ara que la mitjana poblacional és de $\mu = 500$ hores, quantes hores de vida útil tenen el 10% de productes que menys vida útil tenen? (5 pt)

Dades proporcionades:

- Mitjana poblacional (μ): 500 hores
- Desviació típica (σ): 150 hores

Pasos per calcular el percentil 10:

1. Trobar el valor z corresponent al percentil 10:

- El percentil 10 correspon a l'àrea acumulada de 0,10 (o 10%) a l'esquerra de la mitjana en una distribució normal. En la taula normal estandarditzada (o taula de la distribució normal), podem cercar el valor que deixa el 10% a l'esquerra de la mitjana.
- En una taula de distribució normal estandarditzada, el percentil 10 és aproximadament $z = -1,28$. Si només es disposa de valors positius en la taula, podem trobar el percentil 90, que és igual en magnitud però amb signe contrari, així que $z = 1,28$ en valor absolut.

2. Convertir el valor z a horas de vida útil:

La fórmula per trobar el valor de vida útil (X) és:

$$X = \mu + z \cdot \sigma$$

Substituint els valors:

$$X = 500 + (-1,28) \cdot 150$$

Realitzant el càlcul:

$$X = 500 - 192$$

$$X = 308$$

Resum

El 10% de productes amb menys vida útil tenen una vida útil de **308 hores**.