

P8. — El pes, en grams, de les mongetes en llauna es distribueix normalment amb mitjana μ i desviació típica 7.8. Atès que el 10% d'aquestes llaunes contenen menys de 200 g, calcula:

(a) [6 punts] El valor de la mitjana μ arrodonint-la a les unitats.

1. Formular el problema

Sabem que:

$$P(X < 200) = 0,10$$

En termes de la distribució normal estandarditzada Z :

$$P\left(Z < \frac{200-\mu}{7,8}\right) = 0,10$$

2. Utilitzar la simetria

Com que la taula només té valors positius, utilitzarem la simetria de la distribució normal estandarditzada. Sabem que:

$$P\left(Z < \frac{200-\mu}{7,8}\right) = 0,10$$

Això és equivalent a:

$$P\left(Z > \frac{200-\mu}{7,8}\right) = 0,90$$

I podem escriure-ho com:

$$\frac{200-\mu}{7,8} = z$$

On z és el valor tal que:

$$P(Z < z) = 0,90$$

3. Trobar el valor z a la taula

A la taula de distribució normal estandarditzada, busquem el valor de z que té una àrea acumulada de 0,90.

El valor de z corresponent a una àrea acumulada de 0,90 és **1,28**.

4. Aplicar el valor z

Substituïm $z = 1,28$ en l'equació:

$$\frac{200-\mu}{7,8} = -1,28$$

Resolem per μ :

$$\frac{200-\mu}{7,8} = -1,28$$

Multipliquem amb la desviació típica:

$$200 - \mu = -1,28 \times 7,8$$

Calculem el producte:

$$-1,28 \times 7,8 = -9,984$$

Substituïm el resultat:

$$200 - \mu = -9,984$$

Resol per μ :

$$\mu = 200 - (-9,984)$$

$$\mu = 200 + 9,984$$

$$\mu = 209,984$$

5. Arrodonir el resultat

Arrodonim el resultat a les unitats més properes:

$$\mu \approx 210$$

Resultat Final

La mitjana μ , arrodonida a les unitats, és **210 grams**.

- (b) [2 punts] El percentatge de llaunes que contenen més de 225 g de mongetes. Nota: empra la mitjana arrodonida a les unitats.

Per trobar el percentatge de llaunes que contenen més de 225 grams de mongetes utilitzarem la mitjana μ arrodonida que vam calcular anteriorment (210 grams) i la desviació típica de 7,8 grams. A continuació, detallo el procés:

1. Formular el problema

La distribució del pes de les mongetes segueix una distribució normal $N(\mu, \sigma^2)$ amb $\mu = 210$ grams i $\sigma = 7,8$ grams. Volem trobar el percentatge de llaunes que contenen més de 225 grams.

Així, busquem:

$$P(X > 225)$$

2. Tipificar el valor

Convertim el pes de 225 grams a un valor de la distribució normal estandarditzada Z . Utilitzem la fórmula de tipificació:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

On:

- $X = 225$
- $\mu = 210$
- $\sigma = 7,8$

Així que:

$$Z = \frac{225 - 210}{7,8}$$

$$Z = \frac{15}{7,8}$$

$$Z \approx 1,92$$

3. Buscar l'àrea acumulada

Utilitzem la taula de distribució normal estandarditzada per trobar l'àrea acumulada fins a $Z = 1,92$.

A la taula, el valor de l'àrea acumulada per $Z = 1,92$ és aproximadament **0,9726**. Això significa que:

$$P(Z < 1,92) = 0,9726$$

4. Calcular el complement

Per trobar el percentatge de llaunes que contenen més de 225 grams, hem de calcular el complement de l'àrea acumulada:

$$P(X > 225) = 1 - P(Z < 1,92)$$

$$P(X > 225) = 1 - 0,9726$$

$$P(X > 225) = 0,0274$$

5. Convertir a percentatge

Convertim la probabilitat a percentatge:

$$0,0274 \times 100\% = 2,74\%$$

Resultat Final

El percentatge de llaunes que contenen més de 225 grams de mongetes és **2,74%**.

- (c) [2 punts] El percentatge de llaunes que contenen entre 190 g i 225 g de mongetes. Nota: empra la mitjana arrodonida a les unitats.

1. Formular el problema

Volem trobar el percentatge de llaunes amb un pes entre 190 grams i 225 grams. Això es tradueix en calcular:

$$P(190 < X < 225)$$

2. Tipificar els valors

Convertim els pesos de 190 grams i 225 grams a la distribució normal estandarditzada Z .

Per 190 grams:

$$Z_1 = \frac{190 - 210}{7,8}$$

$$Z_1 = \frac{-20}{7,8}$$

$$Z_1 \approx -2,56$$

Per 225 grams:

$$Z_2 = \frac{225-210}{7,8}$$

$$Z_2 = \frac{15}{7,8}$$

$$Z_2 \approx 1,92$$

3. Utilitzar la simetria per obtenir l'àrea acumulada

Com que la taula només mostra valors positius, utilitzarem la simetria de la distribució normal:

- Per a $Z = -2,56$, utilitzem que:

$$P(Z < -2,56) = 1 - P(Z < 2,56)$$

Busquem l'àrea acumulada per $Z = 2,56$:

- Àrea acumulada per $Z = 2,56$:** A la taula, el valor de l'àrea acumulada per $Z = 2,56$ és aproximadament **0,9948**.

Per tant:

$$P(Z < -2,56) = 1 - 0,9948$$

$$P(Z < -2,56) = 0,0052$$

- Àrea acumulada per $Z = 1,92$:** A la taula, l'àrea acumulada per $Z = 1,92$ és aproximadament **0,9726**.

4. Calcular la probabilitat entre els dos valors

Per trobar la probabilitat de que X estigui entre 190 grams i 225 grams:

$$P(190 < X < 225) = P(Z < 1,92) - P(Z < -2,56)$$

$$P(190 < X < 225) = 0,9726 - 0,0052$$

$$P(190 < X < 225) = 0,9674$$

5. Convertir a percentatge

Convertim la probabilitat a percentatge:

$$0,9674 \times 100\% = 96,74\%$$

Resultat Final

El percentatge de llaunes que contenen entre 190 grams i 225 grams de mongetes és **96,74%**.