

Exercici 1

Considereu la funció $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.

- a) Determineu els talls de la corba $y = f(x)$ amb els eixos de coordenades, i les equacions de les seves possibles asímptotes verticals, horitzontals i obliqües.

[1 punt]

1. a) Com que $f(0) = \frac{0}{-1} = 0$, el tall amb l'eix d'ordenades és al punt $(0,0)$. Per als talls amb l'eix d'abscisses, hem de resoldre l'equació $\frac{x^2 - 2x}{x - 1} = 0$, que té com a solucions $x = 0$ i $x = 2$; per tant, els talls amb l'eix d'abscisses són $(0,0)$ i $(2,0)$.

Aquesta funció té una asímptota vertical a $x = 1$, ja que aquest punt és fora del domini i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$ (més precisament, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{-1}{+0} = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{-1}{-0} = +\infty$). A més a més, aquesta funció té una asímptota obliqua, ja que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Com que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x - 1} = -1,$$

es tracta de la recta $y = x - 1$.

- b) Calculeu les equacions de les rectes tangents a la corba $y=f(x)$ en els punts $x=0$ i $x=2$. Aquestes dues rectes són paral·leles? Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

b) La derivada d'aquesta funció és:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

Com que $f(0) = 0$ i $f'(0) = 2$, la recta tangent al punt $(0,0)$ tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 0) \rightarrow y = 2x.$$

Anàlogament, com que $f(2) = \frac{4-4}{1} = 0$ i $f'(2) = \frac{4-4+2}{1} = 2$, la recta tangent al punt $(2,0)$ tindrà per equació:

$$y - 0 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 4.$$

Aquestes dues rectes són paral·leles ja que tenen el mateix pendent: $f'(0) = f'(2) = 2$.

- c) Hi ha algun punt on la recta tangent a $f(x)$ tingui pendent 1? En cas afirmatiu, trobeu-lo.

[0,5 punts]

- c) Igualant la derivada a 1, ens queda una equació sense solució:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2} = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 \rightarrow 2 = 1.$$

Per tant, no hi ha cap punt on la recta tangent tingui pendent 1.