

Exercici 1

Considereu la funció $f(x) = +\sqrt{1+x^3}$.

a) Indiqueu el domini d'aquesta funció i els talls de la corba $y=f(x)$ amb els eixos de coordenades.

[0,5 punts]

1. a) El domini d'aquesta funció és

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 1+x^3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \\ &= [-1, +\infty). \end{aligned}$$

Com que $f(0) = \sqrt{1+0^3} = 1$, el tall d'aquesta funció amb l'eix d'ordenades és al punt $(0,1)$. Els talls amb l'eix d'abscisses corresponen a les solucions de l'equació $f(x) = 0$, que són

$$\sqrt{1+x^3} = 0 \rightarrow 1+x^3 = 0 \rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x = -1.$$

Per tant, es tracta només del punt $(-1, 0)$.

b) Resoleu l'equació $f'(x) = 0$ i estudieu les zones de creixement i decreixement de la funció $f(x)$, així com els seus màxims i mínims locals.

[1 punt]

b) La derivada de $f(x)$ és $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$, i l'equació de l'enunciat és $\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = 0$. Aïllant, ens queda $3x^2 = 0$ i, per tant $x = 0$. L'únic candidat a extrem dins l'interior del domini és, doncs, el punt $x = 0$. Ara bé, la funció derivada és positiva, $f'(x) \geq 0$, per que es tracta d'una fracció entre nombres sempre positius. Això vol dir que f és una funció creixent en tot el seu domini $[-1, \infty)$. Per tant, aquesta funció no té cap màxim ni mínim locals.

- c) Trobeu quin ha de ser el valor de a per tal que el punt $(a, 3)$ pertanyi a la gràfica de la funció i calculeu l'equació de la recta tangent a la corba $y=f(x)$ en aquest punt.
[1 punt]

- c) El punt de tangència $(a, 3)$ està sobre la gràfica de la funció i, per tant, compleix

$$f(a) = \sqrt{1+a^3} = 3 \rightarrow 1+a^3 = 9 \rightarrow a^3 = 8 \rightarrow a = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Aquesta recta tangent tindrà pendent $m = f'(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}} = \frac{12}{6} = 2$. Per tant, es tracta de

$$y - 3 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 1.$$