

Exercici 2

Un inversor té uns diners invertits en un fons d'inversió molt volàtil. El valor de la seva inversió en euros durant un dia determinat és donat per la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{35x^2}{2} + 300x + 250,$$

en què $x \in [0, 24]$ representa el temps en hores.

- a) Calculeu el valor inicial de la inversió en començar el dia i determineu quin benefici o pèrdua haurà tingut al cap de 24 hores. Trobeu també a quina hora del dia el valor de la inversió ha estat màxim i quin era aquest valor màxim.

[1,5 punts]

2.

- a) En primer lloc, hem de calcular el valor de la inversió a l'inici del dia, és a dir, quan $x = 0$. Observem que $f(0) = 250$; per tant, el valor inicial és de 250 euros. Al final del dia, quan $x = 24$ el valor de la inversió és de $f(24) = 1978$ euros. Per tant, durant el dia ha tingut un benefici de $1978 - 250 = 1728$ euros.

Per saber en quin instant del dia s'assoleix el valor màxim, comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(x) = x^2 - 35x + 300$$

Si igualem la derivada a zero obtenim $x = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{2}$; és a dir, tenim dues solucions $x = 15$ i $x = 20$. Per veure si són màxims o mínims relatius, podem estudiar el signe de la derivada. Veiem que

- $f'(x) > 0$ per $0 \leq x < 15$; per tant, aquí la funció és creixent.
- $f'(x) < 0$ per $15 < x < 20$; per tant, aquí la funció és decreixent.
- $f'(x) > 0$ per $20 < x \leq 24$; per tant, aquí la funció és creixent.

Obtenim, per tant, que la funció té un màxim relatiu en $x = 15$ i un mínim relatiu en $x = 20$.

L'instant en què la inversió assolirà el valor màxim és el màxim absolut de la funció $f(x)$ en el domini en què està definida $x \in [0,24]$. A partir dels intervals de creixement i decreixement que hem obtingut, aquest màxim absolut només es podrà assolir o bé en el màxim relatiu $x = 15$ o bé en l'extrem superior de l'interval de definició $x = 24$.

Observem que $f(15) = 1937,5$; per tant, l'instant en què s'assoleix el màxim és al final del dia i aquest valor màxim és de $f(24) = 1978$ euros.

b) Hi ha algun moment del dia en què el valor de la inversió és negatiu? Quin és el valor mínim que assolix?

[1 punt]

b) Per saber l'instant en què el valor de la inversió ha estat mínim, a partir de l'estudi que hem fet dels intervals de creixement i decreixement de la funció, hem de comprovar el valor de la inversió en l'instant en què s'assoleix el mínim relatiu i en l'instant inicial. Observem que en $x = 20$ el valor de la inversió és de $f(20) = 1916,67$ euros.

Per tant, el mínim absolut s'assoleix en l'instant inicial $f(0) = 250$ euros, i, en particular, no hi ha cap instant en què el valor de la inversió hagi estat negatiu.