

Exercici 2

Considereu el sistema d'equacions

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + az = 1 \\ -2x - 6y + 2z = 2a \\ ax + 3y + z = 3 \end{array} \right\},$$

on a és un paràmetre real, i siguin π_1 el pla determinat per la primera equació, π_2 el determinat per la segona, i π_3 el determinat per la tercera.

a) Discutiu el sistema en funció del valor de a .

[1 punt]

2. a) Comencem calculant el determinant de la matriu de coeficients del sistema:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ -2 & -6 & 2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 6a - 6a - (-6a^2 + 6 - 6) = 6a^2 - 6 \\ = 6(a^2 - 1).$$

Clarament s'anul·la només quan $a = \pm 1$. Per tant si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ el rang de la matriu de coeficients és 3, el rang de la matriu ampliada també i, com que tenim tres incògnites, és un sistema compatible determinat.

Per al cas $a = 1$ tenim el sistema d'equacions:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Fem Gauss: a la fila 2 li sumem dues vegades la fila 1, i a la fila 3 li restem la fila 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Clarament, veient la tercera equació, es tracta d'un sistema incompatible.

Finalment, per al cas $a = -1$ tenim el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Tornem a fem Gauss: a la fila 2 li sumem dues vegades la fila 1, i a la fila 3 li sumem la fila 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -6 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Ara està clar que els rangs de les matrius de coeficients i ampliada són ambdós 2 i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

b) Descriu la posició relativa dels tres plans π_1 , π_2 i π_3 en funció del valor de a .
[0,75 punts]

b) Per al cas $a \neq 1$ i $a \neq -1$ el sistema ens ha donat compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans π_1 , π_2 i π_3 es tallen en un sol punt comú.

Per al cas $a = 1$ el sistema és incompatible i, per tant, els tres plans a la vegada no s'intersequen. Clarament, π_1 i π_3 són plans paral·lels (per que els vectors $(1, 3, 1)$ i $(1, 3, 1)$ són proporcionals) i π_2 és un pla secant als dos anteriors.

Finalment, per al cas $a = -1$, tenim que $\pi_1 = \pi_2$ (les equacions són proporcionals) i π_3 és un pla secant a l'anterior; per tant, la intersecció dels tres és una recta.

- c) En algun cas la intersecció dels tres plans és una recta? En cas afirmatiu, digueu per a quin valor del paràmetre, i doneu un vector director i un punt d'aquesta recta.
[0,75 punts]

c) Pel que hem vist a l'apartat anterior l'únic cas en què la intersecció dels tres plans és una recta és per $a = -1$. Resolem el sistema aprofitant els càlculs de l'apartat (a). Tenim $y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ i $x + 3\frac{2}{3} - z = 1$, per tant, $x = z - 1$. Les solucions, i per tant els punts de la recta en qüestió són de la forma $(x, y, z) = \left(z - 1, \frac{2}{3}, z\right) = \left(-1, \frac{2}{3}, 0\right) + z(1, 0, 1)$. D'aquí veiem que $\left(-1, \frac{2}{3}, 0\right)$ és un punt d'aquesta recta i $(1, 0, 1)$ n'és un vector director.