

Exercici 2

Una empresa fabrica bicicletes convencionals i elèctriques. El responsable de qualitat de l'empresa ha mirat l'historial de vendes i ha calculat que el 5 % de les bicicletes convencionals havien tingut algun tipus de problema que n'havia requerit una revisió postvenda. En el cas de les bicicletes elèctriques, aquest percentatge era del 15 %. Actualment, el 25 % de la producció és de bicicletes convencionals i el 75 %, de bicicletes elèctriques.

- a) Si escollim una bicicleta a l'atzar, quina és la probabilitat que tingui algun tipus de problema que requereixi una revisió postvenda? Si la bicicleta escollida a l'atzar presenta algun tipus de problema que requereixi una revisió postvenda, quina és la probabilitat que sigui elèctrica?

[1,25 punts]

- a) Considerem els esdeveniments

D = la bicicleta té algun tipus de problema que requereix del servei post-venda.

M = la bicicleta és manual.

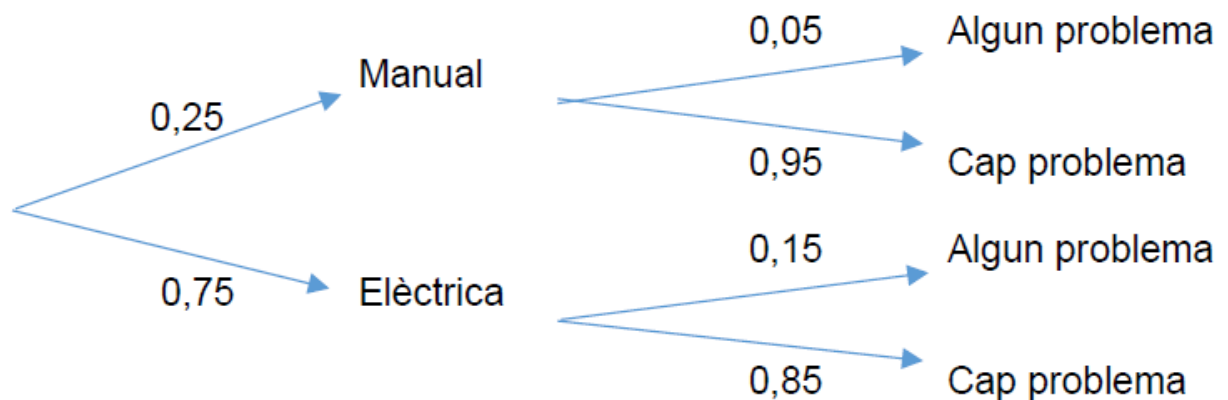
E = la bicicleta és elèctrica.

De l'enunciat del problema sabem que $P(M) = 0,25$ i $P(E) = 0,75$. Sabem també que $P(D|M) = 0,05$ i $P(D|E) = 0,15$.

Aleshores, per la fórmula de les probabilitats totals,

$$P(D) = P(D \cap M) + P(D \cap E) = P(M) \cdot P(D|M) + P(E) \cdot P(D|E) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,75 \cdot 0,15 = \frac{1}{8} = 0,125.$$

També ho podem plantejar mitjançant un diagrama d'arbre



Així doncs, la probabilitat que la bicicleta tingui algun tipus de problema que requereixi el servei post-venda és de 0.125.

Ara ens demanen que calculem la probabilitat que la bicicleta sigui elèctrica si sabem que ha tingut algun tipus de problema que ha requerit el servei post-venda. Per tant,

$$P(E|D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(E) \cdot P(D|E)}{P(D)} = \frac{0,75 \cdot 0,15}{0,125} = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Si sabem que la bicicleta ha tingut algun tipus de problema que ha requerit el servei post-venda la probabilitat que es tracti d'una bicicleta elèctrica és de 0.9.

- b) El responsable de qualitat creu que la dada segons la qual un 15 % de bicicletes elèctriques tenen algun problema que requereix el servei postvenda ha quedat desfasada. Considera que actualment tant la tecnologia com els controls de qualitat previs han millorat molt i aquesta proporció ha disminuït. Per a comprovar-ho, pren una mostra de 100 bicicletes elèctriques que ha venut en els darrers mesos i observa que només 8 han requerit una revisió postvenda.

A partir d'aquestes dades, trobeu un interval de confiança del 95 % per a la proporció de bicicletes elèctriques que tenen algun problema i requereixen una revisió postvenda. A partir del resultat obtingut, podem afirmar que aquesta proporció ha disminuït?

[1,25 punts]

FÓRMULES PER A RESOLDRE L'EXERCICI:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ i $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$
- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$
 - per a la proporció (mostres grans):

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

- per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

- b) La mida de la mostra és $n = 100$. L'estimació puntual de la proporció de bicicletes que han requerit la revisió del servei post-venda és de $p = \frac{8}{100} = 0,08$.

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\hat{p} - z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_{\gamma} \leq Z \leq z_{\gamma}) = \gamma$. Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\hat{p} - z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = 0,08 - 1,96 \sqrt{\frac{0,08(1 - 0,08)}{100}} = 0,0268$$

i

$$\hat{p} + z_{\gamma} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = 0,08 + 1,96 \sqrt{\frac{0,08(1 - 0,08)}{100}} = 0,1332.$$

L'interval de confiança demanat és $[0,0268, 0,1332]$. Per tant, amb una confiança del 95% sí que podem afirmar que el percentatge ha millorat respecte a l'històric del 15%. Sabem que, actualment, el percentatge de bicicletes elèctriques que requereixen del servei post-venda està entre el 2,6% i el 13,3% amb una confiança del 95%.