

Exercici 3

Fa uns anys una granja de vaques frisones dedicada a la producció de llet va fer un estudi sobre el pes de les seves vaques i va arribar a la conclusió que aquesta variable seguia una distribució normal amb una mitjana de 580 kg i una desviació típica de 25 kg.

FÓRMULES PER A RESOLDRE L'EXERCICI:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ i $P(-2,58 \leq Z \leq 2,58) = 0,99$

- Intervals de confiança amb un nivell de confiança $\gamma \in (0, 1)$

— per a la proporció (mostres grans):

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

— per a la mitjana (mostres normals amb la variància σ^2 coneguda):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

— per a la mitjana (mostres grans amb la variància σ^2 desconeguda):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

- a) Calculeu, de manera raonada, la probabilitat que si agafem a l'atzar una vaca frisona d'aquesta granja, el seu pes estigui entre 531 i 629 kg.

[1 punt]

3.

- a) Anomenem X la variable “pes de la vaca”. Ens demanen que calculem la $P(531 \leq X \leq 629)$. Sabem que X segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 580$ i desviació típica $\sigma = 25$. Per tant, $Z = \frac{X-580}{25}$ segueix una distribució normal $(0,1)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} P(531 \leq X \leq 629) &= P\left(\frac{531 - 580}{25} \leq \frac{X - 580}{25} \leq \frac{629 - 580}{25}\right) \\ &= P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95. \end{aligned}$$

Per tant, la probabilitat que el pes de la vaca estigui entre aquests dos valors és de 0,95.

- b) Creiem que un canvi en el tipus de farratge que es dona a les vaques n'ha modificat la mitjana del pes. Per a comprovar-ho, hem obtingut el pes d'una mostra de 10 vaques de la granja escollides a l'atzar:

569, 575, 611, 581, 583, 614, 589, 555, 566, 571.

Trobeu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del pes de les vaques, suposant que aquest pes segueix una distribució normal amb una desviació típica de 25 kg. A partir del resultat obtingut, podem afirmar que la mitjana del pes de les vaques ha canviat? Justifiqueu la resposta.

[1,5 punts]

- b) Tenim una mostra de mida $n = 10$. Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$\bar{x} = 581,4$$

D'altra banda, sabem que la desviació típica és $\sigma = 25$.

L'interval de confiança per a la mitjana d'una variable normal amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$, quan la variància σ^2 és coneguda, s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant, tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 581,4 - 1,96 \frac{25}{\sqrt{10}} = 565,9048$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 581,4 + 1,96 \frac{25}{\sqrt{10}} = 596,8952.$$

L'interval de confiança demanat és $[565'9048, 596'8952]$.

A partir del resultat anterior no podem afirmar, amb una confiança del 95%, que el pes de les vaques hagi canviat perquè el valor 580 està dins de l'interval que hem obtingut.