

Exercici 3

Un estudi estableix que el nombre de microorganismes vius en una mostra de laboratori, mesurat en desenes, és donat per la funció

$$f(x) = \frac{15x}{9+x^2} + k,$$

en què x representa les hores transcorregudes des de l'inici de l'estudi.

- a) Determineu el valor de k si sabem que a l'inici de l'estudi hi havia 50 microorganismes. Quin és el valor màxim de microorganismes al qual s'arribarà? En quin instant s'assolirà el màxim?

[1,75 punts]

- a) A l'inici de l'estudi hi havia 50 microorganismes, és a dir, 5 desenes. Per tant, tenim que $f(0) = 5$. Resolem l'equació:

$$\frac{15 \cdot 0}{9 + 0^2} + k = 5$$

i obtenim que $k = 5$.

Busquem ara els extrems relatius de la funció. Comencem calculant la derivada

$$f'(x) = \frac{15 \cdot (9 + x^2) - 15x \cdot 2x}{(9 + x^2)^2} = \frac{135 - 15x^2}{(9 + x^2)^2}$$

igualem la derivada a zero i obtenim

$$135 - 15x^2 = 0.$$

L'equació de segon grau té dues solucions $x = 3$ i $x = -3$. La solució que pertany al domini de definició de la nostra funció és $x = 3$. Estudiarem el signe de la derivada abans i després $x = 3$ i veiem que

- $f'(x) > 0$ per valors $0 \leq x < 3$
- $f'(x) < 0$ per valors $3 < x < +\infty$.

Veiem que al punt $x = 3$ la funció passa de créixer a decreixer i, per tant, hi trobem un màxim.

Calculem ara el valor de la funció en $x = 3$:

$$f(3) = \frac{15 \cdot 3}{9 + 3^2} + 5 = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Per tant, la població màxima s'assolirà a les 3 hores d'iniciar l'estudi i serà de 7,5 desenes, és a dir de 75 microorganismes.

b) En quin valor s'estabilitzarà el nombre de microorganismes a llarg termini?
[0,75 punts]

b) Per saber a quin nombre s'estabilitzarà la població de microorganismes de l'estudi hem de calcular el límit quan el temps tendeix a infinit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x}{9+x^2} + 5 = 0 + 5 = 5.$$

A llarg termini acabarem tenint 5 desenes de microorganismes, és a dir, 50 microorganismes.