

Exercici 3

Un usuari d'Internet ha estimat que el 25 % dels correus electrònics que rep són correu brossa, mentre que la resta no ho són. Per a facilitar la classificació del correu, s'ha instal·lat un filtre que envia a la carpeta de correu brossa el 95 % dels missatges que efectivament ho són. Malauradament, aquest filtre deixa a la safata d'entrada només el 90 % dels missatges bons (i la resta els envia a la carpeta de correu brossa).

- a) Quina és la probabilitat que un missatge sigui enviat pel filtre a la carpeta de correu brossa?

[0,75 punts]

3. a) Considerem els esdeveniments aleatoris

$$B = \text{"rebre un correu brossa"}, \\ CB = \text{"rebre un correu a la carpeta de correu brossa"}.$$

Segons les dades de l'enunciat tenim que $P(B) = 0,25$, $P(\bar{B}) = 1 - 0,25 = 0,75$, $P(CB \mid B) = 0,95$, i $P(\bar{CB} \mid \bar{B}) = 0,9$. Per la llei de la probabilitat total,

$$P(CB) = P(CB \mid B) P(B) + P(CB \mid \bar{B}) P(\bar{B}) = 0,95 \cdot 0,25 + (1 - 0,9) \cdot 0,75 = \\ = 0,3125.$$

b) Un dia, aquest usuari obre la carpeta de correu brossa. Quin percentatge de missatges que no són correu brossa hi trobarà?

[0,75 punts]

b) Cal calcular $P(\bar{B}|CB)$. Per la fórmula de Bayes:

$$P(\bar{B} | CB) = \frac{P(\bar{B} \cap CB)}{P(CB)} = \frac{P(CB | \bar{B}) \cdot P(\bar{B})}{0,3125} = \frac{0,1 \cdot 0,75}{0,3125} = 0,24.$$

S'hi trobarà un 24% dels correus que no són brossa.

En un servidor de correu electrònic determinat, la probabilitat de rebre com a mínim dos correus en menys de t minuts ve donada per la funció $F(t) = \int_0^t A e^{-0,5x} dx$, on A és una constant real.

- c) Sabent que la probabilitat de rebre com a mínim dos correus en menys de dos minuts és $1 - e^{-1}$, trobeu el valor de A .

[1 punt]

c) Calculant la funció de l'enunciat, la probabilitat de rebre almenys dos correus en menys de t minuts és

$$F(t) = \int_0^t A e^{-0,5x} dx = \left[\frac{A}{-0,5} e^{-0,5x} \right]_0^t = \frac{A}{-0,5} (e^{-0,5t} - 1) = 2A(1 - e^{-0,5t}).$$

Imposant el valor de $F(2)$ que ens donen, trobem $2A(1 - e^{-1}) = 1 - e^{-1}$, d'on resulta $A = 0,5$.