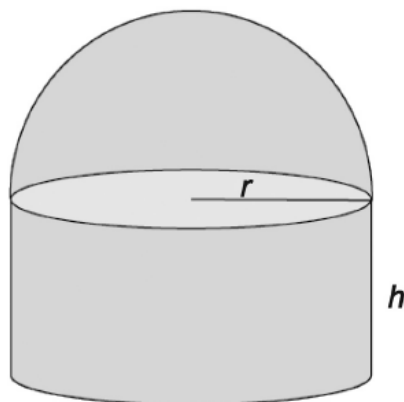


OPCIÓ A

El dissenyador d'una casa de perfums ha decidit que l'ampolla del proper perfum que l'empresa traurà al mercat serà de vidre i tindrà la forma d'un cilindre amb una mitja esfera a la part superior, tal com es pot veure a la figura següent:



El perfum estarà contingut a la part cilíndrica, la qual té una capacitat de 100 cm^3 . L'enginyer a càrrec del procés de producció es proposa minimitzar el cost total del vidre usat i, per tant, vol que la superfície total de l'ampolla sigui mínima.

a) Comproveu que la superfície total de l'ampolla de perfum ve donada per la fórmula

$$S(r) = 3\pi r^2 + \frac{200}{r}.$$

[1 punt]

4. OPCIÓ A. a) Com que el volum de la part cilíndrica ha de ser de 100 cm^3 , tenim que $\pi r^2 h = 100$ i per tant $h = \frac{100}{\pi r^2}$. La superfície total de l'ampolla s'obté sumant la superfície de la base, πr^2 , la superfície lateral del cilindre, $2\pi r h$, i la superfície de la mitja esfera superior, $\frac{1}{2}4\pi r^2 = 2\pi r^2$; per tant, és

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Si substituïm h per l'expressió que tenim en funció de r , obtenim la funció

$$S(r) = 3\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2} = 3\pi r^2 + \frac{200}{r}.$$

- b) Quines dimensions ha de tenir l'ampolla de perfum perquè la superfície total sigui mínima? Quina és la superfície total de l'ampolla en aquest cas?

[1,5 punts]

NOTA: Recordeu que la superfície d'una esfera ve donada per la fórmula $4\pi r^2$, on r és el seu radi.

b) Busquem ara el mínim d'aquesta funció calculant la seva derivada:

$$S'(r) = 6\pi r - \frac{200}{r^2}.$$

Igualant-la a zero, $S'(r) = 0$, obtenim

$$6\pi r - \frac{200}{r^2} = 0,$$

$$6\pi r = \frac{200}{r^2},$$

$$r^3 = \frac{100}{3\pi},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{100}{3\pi}} \simeq 2,2 \text{ cm}.$$

Per verificar que es tracta d'un mínim podem utilitzar la segona derivada

$$S''(r) = 6\pi + \frac{400}{r^3},$$

que és clarament positiva per a qualsevol r positiu. Per tant, per a $r = 2,2 \text{ cm}$ l'ampolla té superfície total mínima. En aquest cas tenim $h = \frac{100}{\pi \cdot 2,2^2} = 6,6 \text{ cm}$ i la superfície total mínima és de $S(2,2) = 3\pi \cdot 2,2^2 + 2\pi \cdot 2,2 \cdot 6,6 \simeq 136,8 \text{ cm}^2$.