

OPCIÓ B

Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$, on a és un paràmetre real, i $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- a) Trobeu els valors de a que fan que les matrius A i B commutin. (Dues matrius A i B commuten si $AB = BA$.)

[0,75 punts]

4. OPCIÓ B. a) Tenim

$$AB = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2 + a^2 & 4a^2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ a + 4 & 4a^2 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les matrius A i B commuten si i només si $2 + a^2 = a + 4$, és a dir, si i només si $a^2 - a - 2 = 0$. Les solucions d'aquesta equació són $a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = 2, -1$. Per $a = 2$ la matriu A coincideix amb B , i per $a = -1$ obtenim $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- b)** Trobeu els valors de a per als quals la matriu A és invertible.
[0,75 punts]

b) La matriu A és invertible si i només si $\det(A) \neq 0$. Tenim

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^3.$$

Per tant la matriu A és invertible si i només si $a \neq 0$.

c) Trobeu els valors de a per als quals $A^{-1} = A$.

[1 punt]

c) Que $A = A^{-1}$ és el mateix que dir $AA = Id$. Imposant aquesta igualtat,

$$AA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 + a & a^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenim les equacions $a^2 = a^4 = 1$ i $a^2 + a = 0$. Les dues primeres equacions es compleixen per $a = 1$ i per $a = -1$, i la tercera per $a = -1$ i per $a = 0$. Per tant, $A^{-1} = A$ si i només si $a = -1$. Alternativament es pot calcular la matriu inversa,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{a^3} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} \end{pmatrix};$$

i, imposant que coincideixi amb la matriu A , obtenim les equacions $a^2 = 1$, $a^3 = -1$, i $a^4 = 1$, que tenen per solució $a = -1$.