

Problema 1. A. Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \quad 1 \quad 0), \quad C = (1 \quad 2) \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sabent que, si K és una matriu, K^T representa la seua matriu transposada, es demana:

a) Calcular $M = AB^T C - D$. (0,75 punts)

a) Càlcul de $M = AB^T C - D$

1. $B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Producte exterior $(2 \times 1)(1 \times 2)$:

$$(AB^T)C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Resta:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Justificar si M és invertible i, si ho és, calcular-ne la inversa.

(0,75 punts)

b) Invertibilitat de M i M^{-1}

$$\det(M) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow M \text{ és invertible.}$$

Per a $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$

$$M^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Determinar M^2 i M^8 .

(0,5 punts)

c) Potències M^2 i M^8

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2.$$

Aleshores

$$M^8 = (M^2)^4 = (3I_2)^4 = 3^4 I_2 = 81I_2.$$

d) Justificar si són invertibles les matrius CC^T i C^TC .

(0,5 punts)

d) Invertibilitat de CC^T i C^TC

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1^2 + 2^2) = (5),$$

és una matriu 1×1 no nul·la $\Rightarrow$ invertible.

$$C^TC = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

No és invertible (rang 1).

e) Trobar la matriu X que satisfà l'equació $A^T + X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T = (C^T B)^T$. (1 punt)

e) Trobar X en

$$A^T + X \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^T = (C^T B)^T.$$

Calculem cada terme:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =: N^T,$$

$$C^T B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (C^T B)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Així,

$$X N^T = (C^T B)^T - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =: Y.$$

Com que $\det(N^T) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$,

$$X = Y (N^T)^{-1} = Y \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resultats finals:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad M^2 = 3I_2, \quad M^8 = 81I_2,$$

$$C C^T = (5) \text{ (invertible)}, \quad C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ (no invertible)},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$