

Problema 1. A. Aquesta setmana una xica ha consumit 1.470 megabytes de dades del seu mòbil connectant-se a xarxes socials, a diaris i a la universitat. La xica ha passat 10 hores connectada a xarxes socials, 4 hores connectada a diaris i 6 hores connectada a la universitat. Se sap que en una hora de connexió a xarxes socials es consumeix un 20% més de megabytes que en una hora de connexió a diaris. Se sap també que en una hora de connexió a diaris es consumeixen 30 megabytes més que en una hora de connexió a la universitat. Quants megabytes consumeix una hora de connexió a xarxes socials? Quants en consumeix una hora de connexió a diaris? Quants en consumeix una hora de connexió a la universitat?

(Plantejament correcte 1,5 punts --- Resolució correcta 2 punts)

1) Sistema lineal (evitem decimals)

Posem les variables en l'ordre (S, D, U) i multipliquem per 5 la segona equació per evitar el 1,2:

$$\begin{cases} D - U = 30 \\ 5S - 6D = 0 \\ 10S + 4D + 6U = 1470 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 10 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ D \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 1470 \end{bmatrix}$$

Anomenem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 10 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} S \\ D \\ U \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 1470 \end{bmatrix}.$$

2) Determinant principal

$$\begin{aligned} \Delta = \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 5 & -6 & 0 \\ 10 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -(5 \cdot 6 - 0 \cdot 10) - (5 \cdot 4 - (-6) \cdot 10) = -30 - (20 + 60) = -110. \end{aligned}$$

Com que $\Delta \neq 0$, el sistema té solució única.

3) Determinants de Cramer

- Substituint la columna de S per $\mathbf{b}$:

$$\Delta_S = \begin{vmatrix} 30 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1470 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -9900.$$

- Substituint la columna de D per $\mathbf{b}$:

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} 0 & 30 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 10 & 1470 & 6 \end{vmatrix} = -8250.$$

- Substituint la columna de U per $\mathbf{b}$:

$$\Delta_U = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 30 \\ 5 & -6 & 0 \\ 10 & 4 & 1470 \end{vmatrix} = -4950.$$

4) Solució (regla de Cramer)

$$S = \frac{\Delta_S}{\Delta} = \frac{-9900}{-110} = 90, \quad D = \frac{\Delta_D}{\Delta} = \frac{-8250}{-110} = 75, \quad U = \frac{\Delta_U}{\Delta} = \frac{-4950}{-110} = 45.$$

5) Resposta (MB per hora)

- Xarxes socials: $S = 90$ MB/h
- Diaris: $D = 75$ MB/h
- Universitat: $U = 45$ MB/h

(Comprovació: $10 \cdot 90 + 4 \cdot 75 + 6 \cdot 45 = 1470$ )