

Problema 1. A. Una empresa fabrica lots de tres productes: P1, P2 i P3. L'empresa té dues plantes de fabricació: A i B. En un dia de funcionament, la planta A fabrica 1 lot del producte P1, 2 lots del P2 i 1 lot del P3, mentre que la planta B fabrica 1 lot del producte P1, 1 del P2 i 5 del P3. Cada dia de funcionament de la planta A costa 60 milers d'euros i cada dia de funcionament de la planta B costa 75 milers d'euros. En els pròxims dies, l'empresa ha de produir almenys 6 lots del producte P1, almenys 8 lots del producte P2 i almenys 10 lots del producte P3.

- a) Quants dies ha de funcionar cada planta perquè el cost de producció siga mínim?
(3 punts)

Dades (variables en dies):

A = dies de funcionament de la planta A

B = dies de funcionament de la planta B

Producció per dia i restriccions (lots):

- Planta A: 1 lot P1, 2 lots P2, 1 lot P3 → contribució (1, 2, 1).
- Planta B: 1 lot P1, 1 lot P2, 5 lots P3 → contribució (1, 1, 5).

Requeriments mínims:

$$\begin{cases} \text{P1: } A + B \geq 6, \\ \text{P2: } 2A + B \geq 8, \\ \text{P3: } A + 5B \geq 10. \end{cases}$$

Cost a minimitzar (en milers d'euros):

$$\text{Cost} = 60A + 75B.$$

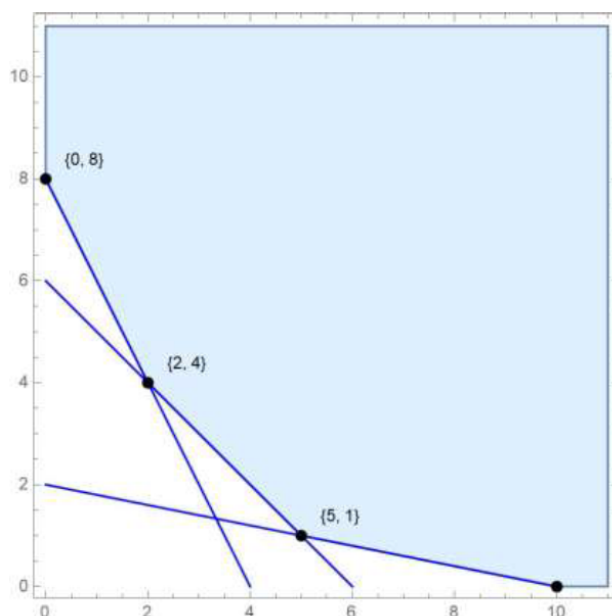
Condicions addicionals: $A \geq 0$, $B \geq 0$.

1. Observació: és un problema de programació lineal en dues variables. La solució òptima (per una funció lineal sobre una regió convexa poligonal) es troba en un dels vèrtexs (punts extremals) de la regió factible. Aleshores comprovarem els vèrtexs que s'obtenen fent igualtats entre parelles de restriccions (i també considerarem els eixos si cal).
2. Calculem interseccions de parelles de rectes (prenent-les com igualtats):
 - Intersecció de $A + B = 6$ i $2A + B = 8$.
 Resta les equacions: $(2A + B) - (A + B) = 8 - 6 \Rightarrow A = 2$. Llavors $B = 6 - 2 = 4$.
 Punt: $(A, B) = (2, 4)$. Comprovació P3: $A + 5B = 2 + 20 = 22 \geq 10 \Rightarrow$ és factible.
 Cost = $60 \cdot 2 + 75 \cdot 4 = 120 + 300 = 420$ (milers €).
 - Intersecció de $A + B = 6$ i $A + 5B = 10$.
 Resta: $(A + 5B) - (A + B) = 10 - 6 \Rightarrow 4B = 4 \Rightarrow B = 1$. Llavors $A = 6 - 1 = 5$.
 Punt: $(A, B) = (5, 1)$. Comprovació P2: $2A + B = 10 + 1 = 11 \geq 8 \Rightarrow$ factible.
 Cost = $60 \cdot 5 + 75 \cdot 1 = 300 + 75 = 375$ (milers €).
 - També comprovem els punts sobre els eixos ($A=0$ o $B=0$):
 Si $A = 0$ cal $B \geq \max(6, 8, 2) = 8 \Rightarrow$ punt $(0, 8)$ cost $75 \cdot 8 = 600$ (milers €).
 Si $B = 0$ cal $A \geq \max(6, 4, 10) = 10 \Rightarrow$ punt $(10, 0)$ cost $60 \cdot 10 = 600$ (milers €).
3. Resum punts factibles i costos:
 - $(2, 4) \rightarrow$ cost 420 (milers €)
 - $(5, 1) \rightarrow$ cost 375 (milers €) ← **més barat**
 - $(0, 8), (10, 0) \rightarrow$ cost 600 (milers €)
 (l'altre intersecció és inviable)

Per tant l'òptim és a $(A, B) = (5, 1)$.

Resposta:

a) Ha de funcionar la planta A 5 dies i la planta B 1 dia.



b) Quin és aquest cost mínim?

(0,5 punts)

b) Cost mínim = $60 \cdot 5 + 75 \cdot 1 = 375$ milers d'euros = **375 000 €**.