

Problema 1. A. En època de regals nadalencs, amb 225 euros es poden comprar dos llibres, tres plomes estilogràfiques i un rellotge intel·ligent. No obstant això, en època de rebaixes ens descompten 5 euros de cada article, cosa que ens permet comprar un llibre més amb aquests mateixos diners. Després, al febrer, passada l'època de rebaixes, cada article costa 5 euros més que en l'època nadalenca, de manera que, amb aquests mateixos diners, podem comprar tres plomes i tres llibres, però cap rellotge intel·ligent. Quin és el preu del llibre, de la ploma estilogràfica i del rellotge intel·ligent en època nadalenca?

(Plantejament correcte 1,5 punts --- Resolució correcta 2 punts)

1. Plantejament de les incògnites

Siga:

- x = preu del llibre en euros (nadalenc)
- y = preu de la ploma estilogràfica en euros (nadalenc)
- z = preu del rellotge intel·ligent en euros (nadalenc)

2. Sistema d'equacions

Època nadalenca

$$2x + 3y + z = 225$$

Rebaixes (5 € menys per article, i un llibre més)

Preu rebaixes de cada article: $x - 5$, $y - 5$, $z - 5$

Compra: $3x + 3y + z$ (un llibre més que a Nadal)

$$3(x - 5) + 3(y - 5) + (z - 5) = 225$$

Febrer (5 € més que a Nadal, sense rellotge)

Preu febrer: $x + 5$, $y + 5$, $z + 5$

Compra: $3x + 3y$ (sense rellotge)

$$3(x + 5) + 3(y + 5) = 225$$

3. Simplificació del sistema

De Nadal:

$$2x + 3y + z = 225 \quad (1)$$

De Rebaixes:

$$3x - 15 + 3y - 15 + z - 5 = 225$$

$$3x + 3y + z - 35 = 225$$

$$3x + 3y + z = 260 \quad (2)$$

De Febrer:

$$3x + 15 + 3y + 15 = 225$$

$$3x + 3y + 30 = 225$$

$$3x + 3y = 195 \quad (3)$$

4. Sistema final

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 225 \\ 3x + 3y + z = 260 \\ 3x + 3y + 0z = 195 \end{cases}$$

5. Resolució amb la regla de Cramer

Matriu de coeficients:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Vector de termes independents:

$$B = \begin{pmatrix} 225 \\ 260 \\ 195 \end{pmatrix}$$

Determinant principal:

$$\det(A) = 2(3 \cdot 0 - 1 \cdot 3) - 3(3 \cdot 0 - 1 \cdot 3) + 1(3 \cdot 3 - 3 \cdot 3)$$

$$\det(A) = 2(0 - 3) - 3(0 - 3) + 1(9 - 9)$$

$$\det(A) = -6 + 9 + 0 = 3$$

Per a x :

$$A_x = \begin{pmatrix} 225 & 3 & 1 \\ 260 & 3 & 1 \\ 195 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_x) = 225(3 \cdot 0 - 1 \cdot 3) - 3(260 \cdot 0 - 1 \cdot 195) + 1(260 \cdot 3 - 3 \cdot 195)$$

$$\det(A_x) = 225(0 - 3) - 3(0 - 195) + 1(780 - 585)$$

$$\det(A_x) = -675 + 585 + 195 = 105$$

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{105}{3} = 35$$

Per a y :

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 225 & 1 \\ 3 & 260 & 1 \\ 3 & 195 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_y) = 2(260 \cdot 0 - 1 \cdot 195) - 225(3 \cdot 0 - 1 \cdot 3) + 1(3 \cdot 195 - 260 \cdot 3)$$

$$\det(A_y) = 2(0 - 195) - 225(0 - 3) + 1(585 - 780)$$

$$\det(A_y) = -390 + 675 - 195 = 90$$

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{90}{3} = 30$$

Per a z :

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 225 \\ 3 & 3 & 260 \\ 3 & 3 & 195 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_z) = 2(3 \cdot 195 - 260 \cdot 3) - 3(3 \cdot 195 - 260 \cdot 3) + 225(3 \cdot 3 - 3 \cdot 3)$$

$$\det(A_z) = 2(585 - 780) - 3(585 - 780) + 225(9 - 9)$$

$$\det(A_z) = 2(-195) - 3(-195) + 0$$

$$\det(A_z) = -390 + 585 = 195$$

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{195}{3} = 65$$

6. Solució final

- Preu del llibre: 35 €
- Preu de la ploma estilogràfica: 30 €
- Preu del rellotge intel·ligent: 65 €