

Problema 1. B. Siguen les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Determina la matriu X que és solució de l'equació $2XA + B^t C = I$, on I és la matriu identitat d'ordre 3 i B^t la transposada de la matriu B . (2,5 punts)

a) Trobar X tal que $2XA + B^t C = I_3$.

Reescrivim l'equació:

$$2XA = I - B^t C \implies X = \frac{1}{2} (I - B^t C) A^{-1}.$$

Cal calcular $B^t C$, A^{-1} i després la producte.

1. $B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Per tant

$$B^t C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Inversa de A . Calculant A^{-1} s'obté

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

3. Ara

$$I - B^t C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Finalment

$$X = \frac{1}{2} (I - B^t C) A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{19}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{12} \\ 2 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(Comprovació ràpida: $2XA + B^t C = I_3$.)

b) Considerem la matriu $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula per a quins valors de z la matriu AD és diagonal. (1 punt)

b) Trobar els valors de z per als quals AD és diagonal, on

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}.$$

Cal calcular AD :

$$AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2z - 1 \\ 0 & 0 & 1 - 2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Perquè aquesta matriu sigui **diagonal**, cal que totes les entrades fora de la diagonal siguin zero. Les úniques entrades fora de la diagonal que depenen de z són les (1,3) i (2,3):

$$2z - 1 = 0, \quad 1 - 2z = 0.$$

Ambdues condicions donen $z = \frac{1}{2}$, que és coherent.

Per tant:

$z = \frac{1}{2}.$