Problema 1 B juliol 2025 reserva País Valencià (àlgebra MACS).

Problema 1. B. Considerem les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el producte AC^t, on C^t és la matriu transposada de C. *(0,75 punts)*

a) Calcula $A\,C^t$

1. Transposada de C:

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(les columnes de C passen a ser files).

2. Multiplicació $A\,C^t$. Fem cada entrada com a producte escalar (fila de A · columna de C^t):

- Fila 1 de A = $(2,1,0)$.
  - $(1,1): \ (2,1,0)\cdot(1,0,1) = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 2.$
  - $(1,2): \ (2,1,0)\cdot(3,2,2) = 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2 = 6+2 = 8.$
  - $(1,3): \ (2,1,0)\cdot(0,1,0) = 2\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1.$

- Fila 2 de A = $(3,5,2)$.
  - $(2,1): \ (3,5,2)\cdot(1,0,1) = 3\cdot 1 + 5\cdot 0 + 2\cdot 1 = 3+2 = 5.$
  - $(2,2): \ (3,5,2)\cdot(3,2,2) = 3\cdot 3 + 5\cdot 2 + 2\cdot 2 = 9+10+4 = 23.$
  - $(2,3): \ (3,5,2)\cdot(0,1,0) = 3\cdot 0 + 5\cdot 1 + 2\cdot 0 = 5.$
- Fila 3 de A = $(1,3,1)$.
  - $(3,1): \ (1,3,1)\cdot(1,0,1) = 1\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1+1 = 2.$
  - $(3,2): \ (1,3,1)\cdot(3,2,2) = 1\cdot 3 + 3\cdot 2 + 1\cdot 2 = 3+6+2 = 11.$
  - $(3,3): \ (1,3,1)\cdot(0,1,0) = 1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 1\cdot 0 = 3.$

Per tant:

$$\boxed{A\,C^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 5 & 23 & 5 \\ 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}}$$

b) Determina la inversa de la matriu $B - A$. *(1,25 punts)*

b) Calcula $(B-A)^{-1}$ (inversa de $B-A$)

1) $B - A$ (resta element a element)

$$B - A = \begin{pmatrix} 1-2 & 2-1 & 1-0 \\ 0-3 & 4-5 & 2-2 \\ 2-1 & 1-3 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Anomenem $M := B - A$.

2) Determinant de M (expansió per la primera fila)

$$\det(M) = (-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Calculem els menors 2×2:

- $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) - 0(-2) = 1.$
- $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-1) - 0\cdot 1 = 3.$
- $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - (-1)\cdot 1 = 6 + 1 = 7.$

Per tant:

$$\det(M) = (-1)\cdot 1 - 1\cdot 3 + 1\cdot 7 = -1 - 3 + 7 = 3.$$

Com que $\det(M) = 3 \neq 0$, M és invertible.

3) Matriu de cofactores (menors amb signe)

Calculem el cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\text{menor }_{ij})$ per a cada posició.

(Es mostren els menors i el cofactor resultants)

- C_{11} : menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_{11} = +1.$
- C_{12} : menor $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow C_{12} = -3$ (sign $-$).
- C_{13} : menor $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow C_{13} = +7.$
- C_{21} : menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_{21} = -1$ (sign $-$).
- C_{22} : menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow C_{22} = 0.$
- C_{23} : minor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_{23} = -1$ (sign $-$).
- C_{31} : menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_{31} = +1.$
- C_{32} : menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow C_{32} = -3$ (sign $-$).
- C_{33} : menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow C_{33} = +4.$

La matriu de cofactores (sense transposar) és

$$\mathrm{Cof}(M) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Adjunta i inversa

L'adjunta és la transposada de la matriu de cofactores:

$$\mathrm{adj}(M) = \mathrm{Cof}(M)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Finalment,

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\,\mathrm{adj}(M) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

(Comprovació ràpida: $(B - A) \cdot (B - A)^{-1} = I_3$.)

$$\boxed{(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}}$$

c) Obtín la matriu X que satisfà l'equació $X^tA + C = X^tB$, on X^t és la matriu transposada de X. *(1,5 punts)*

c) Troba X tal que $X^tA + C = X^tB$

1. Reordenem l'equació per agrupar X^t:

$$X^tA + C = X^tB \quad \Longrightarrow \quad X^tA - X^tB = -C.$$

Factoritzant X^t per la dreta:

$$X^t(A-B) = -C.$$

2. Com que $A - B = -(B-A)$ i $B-A$ és invertible, multipliquem a la dreta per $(A-B)^{-1}$:

$$X^t = -\,C\,(A-B)^{-1}.$$

Però $(A-B)^{-1} = -(B-A)^{-1}$, així que els dos menys es cancel·len:

$$X^t = C\,(B-A)^{-1}.$$

3. Ja coneixem $(B-A)^{-1}$ de l'apartat anterior; multipliquem C per aquesta inversa. Fem cada entrada de X^t com a producte escalar (fila de C · columna de $(B-A)^{-1}$).

Recordatori:

$$(B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fem-ho fila a fila de C:

- Fila 1 de C = $(1,0,1)$.
  - $(X^t)_{11} = (1,0,1)\cdot\left(\frac{1}{3},-1,\frac{7}{3}\right) = 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot(-1) + 1\cdot\frac{7}{3} = \frac{1+7}{3} = \frac{8}{3}$.
  - $(X^t)_{12} = (1,0,1)\cdot\left(-\frac{1}{3},0,-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.
  - $(X^t)_{13} = (1,0,1)\cdot\left(\frac{1}{3},-1,\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.

Per tant fila 1 de X^t és $\left(\frac{8}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$.

- Fila 2 de C = $(3,2,2)$.
  - $(X^t)_{21} = (3,2,2) \cdot \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{7}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{7}{3} = 1 - 2 + \frac{14}{3} = \frac{3-6+14}{3} = \frac{11}{3}$.
  - $(X^t)_{22} = (3,2,2) \cdot \left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot (-\frac{1}{3}) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-\frac{1}{3}) = -1 + 0 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$.
  - $(X^t)_{23} = (3,2,2) \cdot \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{4}{3} = 1 - 2 + \frac{8}{3} = \frac{3-6+8}{3} = \frac{5}{3}$.

Fila 2 de X^t és $\left(\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

- Fila 3 de C = $(0,1,0)$.
  - $(X^t)_{31} = (0,1,0) \cdot \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{7}{3}\right) = -1$.
  - $(X^t)_{32} = (0,1,0) \cdot \left(-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right) = 0$.
  - $(X^t)_{33} = (0,1,0) \cdot \left(\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}\right) = -1$.

Fila 3 de X^t és $(-1,0,-1)$.

Per tant

$$X^t = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalment, X és la transposada de X^t:

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

(Comprovació: substituint a l'equació original es verifica que $X^tA + C = X^tB$.)