

Problema 1. B. A un espectacle circense acudeixen 500 espectadors i la recaptació de l'import de les entrades puja a 2.115 euros. Els menors de 5 anys paguen el 20% de l'entrada, i els que tenen entre 5 i 16 anys, el 50%. Calcula quants espectadors han pagat l'import total de l'entrada, que val 9 euros; quants han pagat el 20% de l'entrada, i quants el 50%, sabent que el nombre d'espectadors que han pagat el 20% és el doble del nombre d'espectadors que han pagat l'entrada completa.

(Plantejament correcte 1,5 punts --- Resolució correcta 2 punts)

Plantejament

Siguin:

- x = nombre d'espectadors que han pagat l'entrada completa (9 €)
- y = nombre d'espectadors que han pagat el 20 % de l'entrada
- z = nombre d'espectadors que han pagat el 50 % de l'entrada

Pas de percentatge a decimal:

- El 20 % equival a $\frac{20}{100} = 0,2$, i el preu pagat és: $9 \times 0,2 = 1,8$ €.
- El 50 % equival a $\frac{50}{100} = 0,5$, i el preu pagat és: $9 \times 0,5 = 4,5$ €.

Sistema d'equacions

1. Total d'espectadors:

$$x + y + z = 500$$

2. Total recaptació (en €):

$$9x + 1,8y + 4,5z = 2115$$

3. El nombre que paga el 20 % és el doble del que paga l'entrada completa:

$$y = 2x$$

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x + 1,8y + 4,5z = 2115 \\ y = 2x \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1,8 & 4,5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 2115 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Regla de Cramer

Determinant principal D :

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot (1,8 \cdot 0 - 4,5 \cdot 1) - 1 \cdot (9 \cdot 0 - 4,5 \cdot (-2)) + 1 \cdot (9 \cdot 1 - 1,8 \cdot (-2)) \\ &= (0 - 4,5) - (0 + 9) + (9 + 3,6) \\ &= -4,5 - 9 + 12,6 = -0,9 \end{aligned}$$

Determinant D_x :

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 500 & 1 & 1 \\ 2115 & 1,8 & 4,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 500 \cdot (1,8 \cdot 0 - 4,5 \cdot 1) - 1 \cdot (2115 \cdot 0 - 4,5 \cdot 0) + 1 \cdot (2115 \cdot 1 - 1,8 \cdot 0) \\ &= 500 \cdot (-4,5) + 0 + 2115 = -2250 + 2115 = -135 \end{aligned}$$

Determinant D_y :

$$\begin{aligned} D_y &= \begin{vmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 9 & 2115 & 4,5 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2115 \cdot 0 - 4,5 \cdot 0) - 500 \cdot (9 \cdot 0 - 4,5 \cdot (-2)) + 1 \cdot (9 \cdot 0 - 2115 \cdot (-2)) \\ &= 0 - 500 \cdot (0 + 9) + (0 + 4230) \\ &= -4500 + 4230 = -270 \end{aligned}$$

Determinant D_z :

$$\begin{aligned} D_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 500 \\ 9 & 1,8 & 2115 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1,8 \cdot 0 - 2115 \cdot 1) - 1 \cdot (9 \cdot 0 - 2115 \cdot (-2)) + 500 \cdot (9 \cdot 1 - 1,8 \cdot (-2)) \\ &= -2115 - (0 + 4230) + 500 \cdot (9 + 3,6) \\ &= -2115 - 4230 + 500 \cdot 12,6 \\ &= -6345 + 6300 = -45 \end{aligned}$$

Solució

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-135}{-0,9} = 150$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-270}{-0,9} = 300$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-45}{-0,9} = 50$$

Resposta final:

$$\boxed{x = 150, \quad y = 300, \quad z = 50}$$

150 han pagat entrada completa, 300 han pagat el 20 %, i 50 han pagat el 50 %.