

**Problema 1. B.** Un creador de contingut desitja invertir en publicitat fins a 10 000 euros. Ha considerat dues empreses, A i B. L'empresa de publicitat A és més agressiva i garanteix un increment anual en nombre de seguidors del 10% del que s'inverteix; la B és més tradicional i l'increment en nombre de seguidors que garanteix és del 7% del que s'inverteix. Així doncs, el creador desitja invertir almenys 2.000 euros en l'empresa B i un màxim de 6.000 euros en la A, invertint sempre en la A almenys el que ha invertit en la B.

- a) Quants diners ha d'assignar a cada empresa perquè l'increment de seguidors siga màxim? (3 punts)

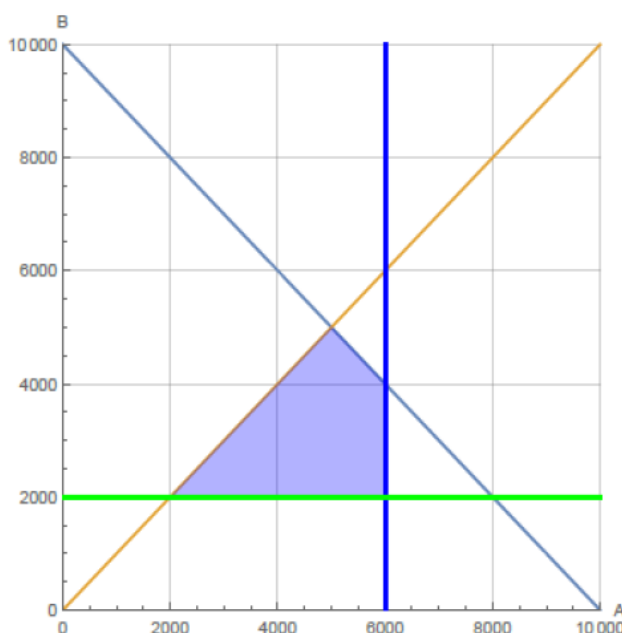
Sigui  $x$  l'import (en euros) invertit a l'empresa A i  $y$  l'import (en euros) invertit a l'empresa B. L'increment anual garantit (en les unitats que dona el problema) és

$$F(x, y) = 0,10x + 0,07y.$$

Restriccions:

$$\begin{cases} x + y \leq 10000 & (\text{pressupost màxim}) \\ y \geq 2000 & (\text{com a mínim a B}) \\ x \leq 6000 & (\text{com a màxim a A}) \\ x \geq y & (\text{A almenys el que s'inverteix a B}) \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Fem l'anàlisi de la regió factible (en l'eix  $x$  considerem  $x \in [2000, 6000]$  perquè  $y \geq 2000$  i  $x \leq 6000$ ; per cada  $x$  vàlid,  $y$  ha d'estar entre 2000 i  $\min(x, 10000 - x)$ ).



Obtenim dos intervals crítics per  $x$ :

- Si  $2000 \leq x \leq 5000$  llavors  $\min(x, 10000 - x) = x$ , així  $y \in [2000, x]$ .

En aquest cas, per maximitzar  $F$  prenc  $y$  com a alt possible:  $y = x$ . Llavors  $F(x, x) = 0,17x$ , creix en  $x$  i s'aconsegueix el màxim en  $x = 5000$ ,  $y = 5000$ .

- Si  $5000 \leq x \leq 6000$  llavors  $\min(x, 10000 - x) = 10000 - x$ , així  $y \in [2000, 10000 - x]$ .

Ací el valor de  $F$  amb  $y = 10000 - x$  és

$$F(x, 10000 - x) = 0,10x + 0,07(10000 - x) = 700 + 0,03x,$$

que també creix amb  $x$ . Per tant el màxim d'aquest tram s'aconsegueix en  $x = 6000$ ,  $y = 10000 - 6000 = 4000$ .

Cal comparar els valors en els vèrtexs candidats:

- $(x, y) = (5000, 5000)$ :  $F = 0,10 \cdot 5000 + 0,07 \cdot 5000 = 500 + 350 = 850$ .
- $(x, y) = (6000, 4000)$ :  $F = 0,10 \cdot 6000 + 0,07 \cdot 4000 = 600 + 280 = 880$ .

També podríem mirar punt amb  $y = 2000$ ,  $x = 6000$  (un vèrtex) que dona  $F = 600 + 140 = 740$  — més petit.

Per tant l'òptim és a  $(x, y) = (6000, 4000)$ .

### Respostes

a) Cal assignar **6000 €** a l'empresa A i **4000 €** a l'empresa B.

b) Quin és aquest increment de seguidors màxim?

(0,5 punts)

b) Increment màxim de seguidors (segons el model donat):

$$F_{\max} = 0,10 \cdot 6000 + 0,07 \cdot 4000 = 600 + 280 = 880.$$