

2.1 Donades la matriu

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que depèn d'un paràmetre real m , i les matrius

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ i } F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}:$$

2.1.1 (0,5 punts) Indica, si existeixen, els valors del paràmetre m per als quals D té inversa.

2.1.1 (0,5 p) Valors de m perquè D tinga inversa

Calculem $\det D$ (expansió per la primera fila):

$$\det D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (\dots) + m \cdot \begin{vmatrix} m & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - 1) + m \cdot (-m) = -1 - m^2.$$

Com que $-1 - m^2 \neq 0$ per a tot $m \in \mathbb{R}$, D és invertible per a tot real m .

Resposta 2.1.1: per a tot $m \in \mathbb{R}$.

2.1.2 (1 punt) Calcula les matrius EF i $(FE)^t$, si existeixen.

2.1.2 (1 p) Calcula EF i $(FE)^t$

Dimensions: E és 1×3 i F és 3×1 .

- EF (escala 1×1):

$$EF = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1 + 8 - 3 = 6.$$

$$\boxed{EF = (6)}.$$

- FE (producte exterior 3×3):

$$FE = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \quad 4 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Per tant, el seu transposat:

$$(FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{(FE)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}}.$$

2.1.3 (1 punt) Resol, per a $m = 0$, l'equació matricial amb incògnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

2.1.3 (1 p) Resol per a $m = 0$ l'equació $\frac{1}{2}X + D = D^{-1}$

Per $m = 0$,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det D = -1 \neq 0.$$

Invers:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equació $\frac{1}{2}X + D = D^{-1}$ dona

$$\frac{1}{2}X = D^{-1} - D \Rightarrow X = 2 \cdot D^{-1} - 2 \cdot D.$$

Calculem:

$$2 \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$X = (2 \cdot D^{-1}) - (2 \cdot D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Resposta 2.1.3: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$