Problema 2 1 juliol 2025 País Valencià (àlgebra MAT).

2.1 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Obtín:

2.1.1 **(1,25 punts)** La matriu X solució de l'equació $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.1 Trobar X tal que $(A^{-1}X)^{-1} = A\,(B^2A)^{-1}$.

Denotem $Y = A^{-1}X$. L'equació esdevé $Y^{-1} = A\,(B^2A)^{-1}$. Prenent inverses a ambdós costats:

$$Y = \left(A\,(B^2A)^{-1}\right)^{-1} = (B^2A)\,A^{-1}.$$

Com $Y = A^{-1}X$, tenim

$$A^{-1}X = (B^2A)\,A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad X = A\,(B^2A)\,A^{-1}.$$

Simplificant $(A(B^2A)A^{-1}) = AB^2(AA^{-1}) = AB^2$.

Per tant

$$\boxed{X = AB^2.}$$

Observa que $B^2 = B \cdot B$. Calculem B^2:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Per tant $X = A \cdot I_2 = A$. Així,

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.}$$

2.1.2 **(0,5 punts)** El determinant de la matriu $(3A^5B)^2$.

2.1.2 Determinant de $(3A^5B)^2$.

Aprofitem propietats del determinant (ordre 2):

$$\det\big((3A^5B)^2\big) = \big(\det(3A^5B)\big)^2.$$

I $\det(3A^5B) = 3^2\det(A^5B) = 9\det(A)^5\det(B)$. Per tant

$$\det\big((3A^5B)^2\big) = \big(9\det(A)^5\det(B)\big)^2 = 81\ \det(A)^{10}\ \det(B)^2.$$

Calculem $\det(A)$ i $\det(B)$:

$$\det(A) = (-2)(-2) - 1\cdot 3 = 4 - 3 = 1, \qquad \det(B) = 1\cdot(-1) - 2\cdot 0 = -1.$$

Així $\det(A)^{10} = 1$ i $\det(B)^2 = (-1)^2 = 1$. Finalment

$$\boxed{\det\big((3A^5B)^2\big) = 81.}$$

2.1.3 **(0,75 punts)** Els valors de a i b, si existeixen, tals que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$.

2.1.3 Trobar a, b tals que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$, si existeixen.

Observació: $B^2 = I$ com hem vist, per tant per a tot n

$$B^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ és parell,} \\ B & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

Així $B^{100} = I$ i $B^{99} = B$. L'equació esdevé

$$aI + bB = A + C.$$

Calculem $A + C$:

$$A + C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Per tant voldríem $aI + bB = I$. Escrivint-ho component a component:

$$aI + bB = \begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'aquí obtenim el sistema

$$a + b = 1, \qquad 2b = 0, \qquad a - b = 1.$$

De $2b = 0$ surt $b = 0$; llavors $a = 1$, que també satisfà $a - b = 1$. Per tant existeixen i són únics:

$$\boxed{a = 1, \qquad b = 0.}$$