Problema 2 1 juliol 2025 reserva País Valencià (àlgebra MAT).

2.1 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula:

2.1.1 **(0,75 punts)** La matriu X, si existeix, tal que $2AX = BX + I$, on I és la matriu identitat 2×2.

2.1.1 Trobar X tal que 2AX = BX + I

Pas 1: Reescrivim l'equació:

$$2AX = BX + I \implies 2AX - BX = I \implies (2A - B)X = I$$

Pas 2: Calcul de 2A - B

$$2A = 2 * \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pas 3: Trobar X = $(2A - B)^{-1}$

- Determinant: (-1)(-2) - (1)(-1) = 2 + 1 = 3
- Inversa: (intercanviem elements diagonals i canviem signe dels altres, multiplicat per 1/det):

$$(2A - B)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

✅ **Resposta 2.1.1:**

$$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2 **(0,75 punts)** Si existeixen, els valors del paràmetre real α tals que $4A^2 + \alpha A - I = 0$, on 0 és la matriu nul·la 2×2.

2.1.2 Trobar α tal que 4A² + αA - I = 0

Pas 1: Calcul de A²

Multipliquem A per si mateixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- (1,1) = 1/2*1/2 + 1*0 = 1/4
- (1,2) = 1/2*1 + 1*(-1/2) = 1/2 - 1/2 = 0
- (2,1) = 0*1/2 + (-1/2)*0 = 0
- (2,2) = 0*1 + (-1/2)*(-1/2) = 1/4

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = 1/4 * I$$

Pas 2: Substituïm a l'equació:

$$4A^2 + \alpha A - I = 4 * (1/4)I + \alpha A - I = I + \alpha A - I = \alpha A$$

Perquè sigui igual a 0, necessitem α = 0.

✅ **Resposta 2.1.2:** α = 0

2.1.3 **(1 punt)** A^{12}.

2.1.3 Trobar A^{12}

Pas 1: Observació

Hem vist que $A^2 = 1/4 * I$.
Això permet fer potències fàcilment:

$$A^{2n} = (A^2)^n = (1/4)^n * I$$

Pas 2: Aplicació a n = 6 per A^{12}

$$A^{12} = (A^2)^6 = (1/4)^6 * I = 1/4096 * I$$

✅ **Resposta 2.1.3:**

$$A^{12} = \frac{1}{4096}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resum de respostes

Apartat	Solució
2.1.1	$X = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$
2.1.2	$\alpha = 0$
2.1.3	$A^{12} = \frac{1}{4096} I$