

2.1 En un sistema de processament d'imatges es fa servir una matriu per transformar certes dades. La matriu depèn del paràmetre real α i és:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 (1,25 punts) En un dels processos, perquè el sistema funcione, cal que la matriu siga idempotent, és a dir, que el seu quadrat coincidisca amb ella, $A^2 = A$. Obtén els valors de α que permeten que el sistema funcione.

La matriu depèn de α :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

2.1.1 Idempotència: $A^2 = A$

Cal calcular A^2 . Multiplicant:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)^2 \end{pmatrix}.$$

Imposant $A^2 = A$ obtenim igualtat entrada a entrada:

1. (1,2): $\alpha + \alpha^2 = \alpha \implies \alpha^2 = 0 \implies \alpha = 0$.
2. (2,2): $\alpha^2 = \alpha \implies \alpha(\alpha - 1) = 0 \implies \alpha = 0 \text{ o } \alpha = 1$.
3. (3,3): $(1 - \alpha)^2 = 1 - \alpha \implies (1 - \alpha)(-\alpha) = 0 \implies \alpha = 0 \text{ o } \alpha = 1$.

Però la igualtat (1,2) obliga $\alpha = 0$. Així l'únic valor que satisfà totes les igualtats és

$$\boxed{\alpha = 0}.$$

(Comprovació: amb $\alpha = 0$, $A = \text{diag}(1, 0, 1)$, i efectivament $A^2 = A$.)

2.1.2 (1,25 punts) En un altre procés diferent, cal utilitzar la matriu inversa d' A . Obtén els valors de α per als quals hi ha la inversa i calcula aquesta inversa en funció de α .

2.1.2 Inversa d' A

Perquè A tinga inversa cal que $\det(A) \neq 0$. Com la matriu és triangular,

$$\det(A) = 1 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha) = \alpha(1 - \alpha).$$

Per tant A és invertible si i només si

$$\boxed{\alpha \neq 0 \quad \text{i} \quad \alpha \neq 1.}$$

Ara calculem A^{-1} per $\alpha \neq 0, 1$. Observa que els dos primers blocs formen una matriu 2×2

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ i la tercera fila/columna és independent. Invertim el bloc 2×2 :

Per $M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ tenim $\det M = \alpha$ i

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

I per la component (3,3) l'inversa és $\frac{1}{1 - \alpha}$.

Per tant, per $\alpha \neq 0, 1$,

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - \alpha} \end{pmatrix}.$$

(Quitació ràpida: es pot verificar $AA^{-1} = I$ fent la multiplicació.)

Resum final

- Idempotent $\Rightarrow \alpha = 0$.
- Invertible $\iff \alpha \neq 0 \text{ i } \alpha \neq 1$.
- Per $\alpha \neq 0, 1$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$