

2.1 Una empresa de producció agrícola desenvolupa fertilitzants que combinen tres nutrients essencials: nitrogen (N), fòsfor (P) i potassi (K). Es representen per x, y, z les quantitats en quilograms que s'han d'usar per lot de N, P, K, respectivament. Aquestes quantitats han de complir les restriccions següents:

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30 \\ -2x + y + z = 4 \\ 2x - y + \alpha z = 10 \end{cases},$$

on α és un paràmetre real.

2.1.1 (1,25 punts) Discuteix, en funció del paràmetre α , el sistema d'equacions anterior.

Sistema (amb $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} 3x + 4y + \alpha z = 30, \\ -2x + y + z = 4, \\ 2x - y + \alpha z = 10. \end{cases}$$

2.1.1 Discussió segons α

Cal calcular el determinant de la matriu de coeficients

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calculant el determinant per la primera fila (o desenvolupament de Sarrus):

$$\det(A) = 3(\alpha + 1) - 4(-2\alpha - 2) + \alpha(0) = 11(\alpha + 1).$$

Per tant:

- Si $\alpha \neq -1$ tenim $\det(A) \neq 0$. El sistema és **compatible determinat** (té una única solució).
- Si $\alpha = -1$ tenim $\det(A) = 0$. En aquest cas cal mirar la matriu ampliada; substituïm $\alpha = -1$ i veiem que sumant la segona i tercera equació s'obté $0 = 14$, contradicció. Això significa que per $\alpha = -1$ el sistema és **incompatible** (no té solució).

Resum: compatible determinat per $\alpha \neq -1$; incompatible per $\alpha = -1$.

2.1.2 (1,25 punts) Obtén les quantitats x, y, z en el cas que el sistema siga compatible.

2.1.2 Solució quan el sistema és compatible ($\alpha \neq -1$)

Podem resoldre fent eliminació. Una manera ràpida és sumar la segona i tercera equació:

$$(-2x + 2x) + (y - y) + (1 + \alpha)z = 4 + 10 \Rightarrow (1 + \alpha)z = 14.$$

Com $\alpha \neq -1$, se segueix

$$z = \frac{14}{1 + \alpha}.$$

Ara de la segona equació $-2x + y + z = 4$ obtenim $y = 4 + 2x - z$. Substituïm a la primera equació per trobar x :

$$3x + 4(4 + 2x - z) + \alpha z = 30.$$

Simplificant es queda

$$11x + 16 + (\alpha - 4)z = 30 \Rightarrow 11x = 14 - (\alpha - 4)z.$$

Substituint $z = \frac{14}{1 + \alpha}$:

$$11x = 14 - (\alpha - 4)\frac{14}{1 + \alpha} = \frac{14}{1 + \alpha}((1 + \alpha) - (\alpha - 4)) = \frac{14}{1 + \alpha} \cdot 5.$$

Així

$$x = \frac{70}{11(1 + \alpha)}.$$

Finalment

$$y = 4 + 2x - z = 4 + \frac{140}{11(1 + \alpha)} - \frac{14}{1 + \alpha} = \frac{30 + 44\alpha}{11(1 + \alpha)}.$$

Per tant, per $\alpha \neq -1$ la solució és

$x = \frac{70}{11(1 + \alpha)}, \quad y = \frac{30 + 44\alpha}{11(1 + \alpha)}, \quad z = \frac{14}{1 + \alpha}.$

(Comprovació ràpida: substituint aquestes expressions a les tres equacions s'obté identitat.)

Resum final

- Discussió: $\det(A) = 11(\alpha + 1)$.
 - $\alpha \neq -1 \Rightarrow$ sistema compatible determinat (solució única donada més amunt).
 - $\alpha = -1 \Rightarrow$ sistema incompatible (no té solució).
- Solució per $\alpha \neq -1$:

$$x = \frac{70}{11(1 + \alpha)}, \quad y = \frac{30 + 44\alpha}{11(1 + \alpha)}, \quad z = \frac{14}{1 + \alpha}.$$