

2.2 Donada la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 (1,25 punts) Estudia el rang de la matriu A en funció del paràmetre real m .

2.2.1 (1,25 p) Rang d' A en funció de m

Calculem el determinant:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(m-2)(2m+3).$$

- Si $m \neq 2$ i $m \neq -\frac{3}{2}$, aleshores $\det A \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3$.
- Si $m = 2$ o $m = -\frac{3}{2}$, aleshores $\det A = 0$.

Però el menor 2×2 de les dues primeres files i dues primeres columnes és

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ de manera que } \operatorname{rg}(A) = 2.$$

Conclusió:

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3, & m \neq 2, -\frac{3}{2}, \\ 2, & m = 2 \text{ o } m = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

2.2.2 (1,25 punts) Per a $m = 0$, determina la matriu inversa de $\frac{1}{6}A$, si existeix.

2.2.2 (1,25 p) Per a $m = 0$, inversa de $\frac{1}{6}A$, si existeix

Per $m = 0$:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det A_0 = 6 \neq 0 \Rightarrow A_0^{-1} \text{ existeix.}$$

Recorda que $(c \cdot A)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$ per $c \neq 0$. Per tant,

$$\left(\frac{1}{6} A_0\right)^{-1} = 6 \cdot A_0^{-1}.$$

Calculem A_0^{-1} (per adjunta o resolent $A_0 X = I$):

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \implies \left(\frac{1}{6} A_0\right)^{-1} = 6 \cdot A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resposta 2.2.2:

$$\boxed{\left(\frac{1}{6} A\right)^{-1} \Big|_{m=0} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$