

**2.2** Donat el següent sistema d'equacions lineals que depenen del paràmetre real  $a$ :

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}.$$

**2.2.1 (1,25 punts)** Discuteix el sistema d'equacions en funció dels valors del paràmetre  $a$ .

### 2.2.1 — Discussió del sistema en funció del paràmetre $a$

Donat el sistema ( $a \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Considerem la matriu de coeficients

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculem el determinant  $\det(A)$ . Desenvolupant per la primera fila:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (-a) \cdot \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} a & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + a \cdot (a \cdot 0 - 1 \cdot a) + (-1) \cdot (a \cdot 1 - (-1) \cdot a) \\ &= -1 - a^2 - 2a = -(a + 1)^2. \end{aligned}$$

Per tant  $\det(A) = -(a + 1)^2$ . D'aquí s'obté:

- Si  $a \neq -1 \Rightarrow \det(A) \neq 0$ . El sistema és **compatible determinat** (té una única solució).
- Si  $a = -1 \Rightarrow \det(A) = 0$ . Cal estudiar llavors compatibilitat: pot ser incompatible o compatible indeterminat (infinites solucions). En el següent apartat es tracta el cas  $a = -1$  explícitament.

2.2.2 (1,25 punts) Calcula el conjunt de solucions del sistema per als valors de  $a$  per als quals el sistema és compatible determinat.

### 2.2.2 — Càlcul del conjunt de solucions quan el sistema és compatible determinat

Som en el cas  $a \neq -1$  (perquè només per aquests valors el sistema és compatible determinat). Resolem el sistema.

Partim de la tercera equació:

$$ax + y = a \Rightarrow y = a - ax.$$

Substituïm a la primera i la segona:

Primera:

$$\begin{aligned} x - ay - z &= -a \Rightarrow x - a(a - ax) - z = -a \\ \Rightarrow (1 + a^2)x - z &= a^2 - a. \end{aligned} \tag{1}$$

Segona:

$$\begin{aligned} ax - y + z &= a \Rightarrow ax - (a - ax) + z = a \\ \Rightarrow 2ax + z &= 2a. \end{aligned} \tag{2}$$

Sumant (1) i (2) per eliminar  $z$ :

$$(1 + a^2)x + 2ax = (a^2 - a) + 2a \Rightarrow (a + 1)^2 x = a(a + 1).$$

Com  $a \neq -1$  dividim per  $a + 1$ :

$$(a + 1)x = a \Rightarrow x = \frac{a}{a + 1}.$$

Calculem  $y$  i  $z$ :

$$y = a - ax = a\left(1 - \frac{a}{a + 1}\right) = a \cdot \frac{1}{a + 1} = \frac{a}{a + 1}.$$

$$\text{Des de (2): } z = 2a - 2ax = 2a\left(1 - \frac{a}{a + 1}\right) = \frac{2a}{a + 1}.$$

Per tant, per  $a \neq -1$  la solució única és

$$(x, y, z) = \left( \frac{a}{a + 1}, \frac{a}{a + 1}, \frac{2a}{a + 1} \right).$$

## Complement — cas $a = -1$ (per completitud)

Si  $a = -1$  posem el sistema original amb  $a = -1$ :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x - y + z = -1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$$

La segona equació és la primera multiplicada per  $-1$ , així que n'hi ha només dues independents. De la tercera  $y = x - 1$ . Substituint a la primera:  $z = 2x - 2$ . Per tant hi ha infinites solucions, parametritzades per  $t \in \mathbb{R}$ :

$$(x, y, z) = (t, t - 1, 2t - 2), t \in \mathbb{R}.$$