

2.2 Siga el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases},$$

on a és un paràmetre real.

2.2.1 (1,25 punts) Discuteix el sistema en funció del paràmetre a .

2.2.1 Discussió del sistema segons a

Matriu de coeficients:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 + a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 - a \\ a \\ 1 - a \end{pmatrix}.$$

Calcul del determinant de A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 + a & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Expansió per la primera fila:

$$\det(A) = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 + a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 + a & 2 \\ a & -1 \end{vmatrix}.$$

Subdeterminants:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 + a & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 + a & 2 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3a.$$

Substituïm:

$$\det(A) = 3 * 3 - 1 * 1 + 2 * (-1 - 3a) = 9 - 1 - 2 - 6a = 6 - 6a = 6(1 - a).$$

- Si $a \neq 1$, $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ sistema compatible determinat
- Si $a = 1$, $\det(A) = 0 \rightarrow$ cal comprovar compatibilitat

Cas $a = 1$

Substituïm $a = 1$:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Resolució:

- De l'equació 3: $x = y - z$
- Substituïm a equació 1: $3(y - z) + y + 2z = 4y - z = 0 \implies z = 4y$
- Substituïm a equació 2: $2x + 2y + z = 2(y - 4y) + 2y + 4y = 0 \neq 1$

 Contradicció → **sistema incompatible**.

2.2.2 (1,25 punts) Calcula les solucions del sistema quan aquest siga compatible.

2.2.2 Solució per $a \neq 1$

Fem Cramer:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)}, \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)}$$

On A_x substitueix la primera columna per $\mathbf{b}$:

$$A_x = \begin{pmatrix} 1-a & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \\ 1-a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcul determinant:

$$\det(A_x) = (1-a) * 3 - 1 * (2a-1) + 2 * (-2+a) = -3a.$$

$$A_y = \begin{pmatrix} 3 & 1-a & 2 \\ 1+a & a & 1 \\ a & 1-a & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A_y) = 3a.$$

$$A_z = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1-a \\ 1+a & 2 & a \\ a & -1 & 1-a \end{pmatrix}, \quad \det(A_z) = 6(1-a).$$

Solució final per $a \neq 1$

$$x = \frac{-3a}{6(1-a)} = -\frac{a}{2(1-a)}, \quad y = \frac{3a}{6(1-a)} = \frac{a}{2(1-a)}, \quad z = \frac{6(1-a)}{6(1-a)} = 1$$

Conclusió resumida

- Si $a \neq 1 \rightarrow$ sistema **compatible determinat**, solució única:

$$x = -\frac{a}{2(1-a)}, \quad y = \frac{a}{2(1-a)}, \quad z = 1$$

- Si $a = 1 \rightarrow$ sistema **incompatible**, sense solució.